

## فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

### درس اول: استدلال ریاضی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: الف) اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر $a$ و $b$ به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.	۰/۵	دی ۱۴۰۱
۲	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: « برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »	۱	دی ۱۴۰۱
۳	هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف: برای هر عدد طبیعی $n$ ، عدد $2^n + 1$ اول است. ب: مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۴	$a_1, a_2, a_3$ اعدادی صحیحی هستند و $b_1, b_2, b_3$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.	۱/۲۵	شهریور ۱۴۰۱
۵	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ . پ) مربع هر عدد فرد، فرد است. ت) عدد حقیقی مانند $x$ وجود دارد که $x^3 < x^2$ .	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۶	اگر $n$ عددی فرد باشد، ثابت کنید $7 - 5n + n^2$ نیز عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۷	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n$ ، $7 - 5n + n^2$ عددی فرد است.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۸	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.	۰.۲۵	دی ۱۴۰۰



دی ۱۴۰۰	۱/۵	۹ اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
شهریور ۱۴۰۰	۱	۱۰ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
خرداد ۱۴۰۰	۰/۵	۱۱ درست یا نادرست بودن گزاره زیر را مشخص کنید. هیچ عدد صحیحی مانند $x, y$ وجود ندارد که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.
خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵	۱۲ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.
دی ۹۹	۰/۲۵	۱۳ گزاره های درست را مشخص کرده و برای گزاره های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.
دی ۹۹	۱/۵	۱۴ اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
خرداد ۹۹	۱/۲۵	۱۵ گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف: مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب: اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.
خرداد ۹۹	۱	۱۶ اگر $x, y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
خرداد ۹۹ خ	۱	۱۷ با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.
شهریور ۹۹	۱	۱۸ درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را تعیین کنید. الف: برای هر دو عدد حقیقی $x, y$ داریم: $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ب: اگر $a, b$ دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ پ: اگر $a, b$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ت: حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.



شهریور ۹۹	۱/۲۵	ثابت کنید اگر $a, b$ دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۱۹
خرداد ۹۸	۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۲۰
خرداد ۹۹ خ	۱	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره هم ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۲۱
خرداد ۹۹ خ	۱	اگر $a, b$ دو عدد صحیح باشند و $ab$ عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.	۲۲
تیر ۹۸	۱/۲۵	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۲۳
تیر و دی ۹۸	۰/۷۵ ۱	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی ( گزاره های هم ارز ) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۲۴
شهریور	۰/۱۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب: برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگتر از یک، عدد $2^n - 1$ اول است.	۲۵
شهریور ۹۸	۱/۵	برای هر سه عدد حقیقی $x, y, z$ ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۲۶
دی ۹۷	۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. اگر $k$ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.	۲۷
دی ۹۷	۱/۲۵	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۲۸
دی ۹۷	۱	گزاره ی زیر را به روش بازگشتی ( گزاره های هم ارز ) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی $x, y$ داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۲۹



## درس دوم : بخش پذیری در اعداد صحیح

دی ۱۴۰۱	۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید : اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$ .	۳۰
دی ۱۴۰۱	۱/۲۵	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(5m + 4)$ و $(6m + 5)$ بر $a$ بخش‌پذیر باشند ، ثابت کنید $a = \pm 1$ .	۳۱
دی ۱۴۰۱	۱	اگر $a$ و $b$ عددی صحیح و فرد باشد ، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید .	۳۲
دی ۱۴۰۱	۰/۵	در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید . الف) حاصل $([m^2, m], m^5)$ برابر با ..... است . ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم $a$ و $b$ ..... هستند.	۳۳
شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵	اگر عدد طبیعی $a$ دو عدد $(5k + 9)$ و $(8k + 13)$ را عاد کند ، ثابت کنید : $a = 1$ یا $a = 7$	۳۴
شهریور ۱۴۰۱	۱	اگر باقیمانده تقسیم عدد $a$ بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد ، باقیمانده تقسیم عدد $a$ را بر ۴۲ بیابید.	۳۵
خرداد ۱۴۰۱ خ	۰/۷۵	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید . الف) اگر $a b$ و $b a$ ، آنگاه $a$ برابر با $(\pm b - b)$ است . ب) اگر $(a, b) = d$ ، آنگاه برای هر $m > 0$ که $m a$ و $m b$ داریم : $(m \geq d - m \leq d)$ ت) اگر برای دو عدد صحیح $x$ و $k$ داشته باشیم : $x = 4k + 3$ آنگاه $x \in [3]_4 - x \in [4]_3$	۳۶
خرداد ۱۴۰۱ خ	۱/۲۵	اگر $a > 1$ و $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ، ثابت کنید $a$ عددی اول است .	۳۷
خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید . الف) اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $ a  >  b $ . ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ اگر $(a c, b c)$ و $(\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m)$ آنگاه $[a, b] = c$ . ت) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و -۲ برابر -۲ است .	۳۸



۳۹	اگر عدد مانند $k$ در $\mathbb{Z}$ باشد، به طوری که $۱ + ۴k \mid ۵$ ، ثابت کنید $۶ + ۲۸k + ۱۶k^2 \mid ۲۵$	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۱
۴۰	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. (ب) اگر برای دو عدد صحیح $a$ و $b$ داشته باشیم $a \mid b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a \mid mb, ma \mid b)$ (پ) اگر $a \mid b$ آن گاه ب.م.م دو عدد $a$ و $b$ برابر با $(a,  a )$ است.	۰/۵	دی ۱۴۰۰
۴۱	ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۴۲	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح $n$ بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر $n$ بخش پذیر است.	۱/۲۵	دی ۱۴۰۰
۴۳	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \mid b$ و $m, n$ دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آن گاه $a^m \mid b^n$ . ب: اگر $a \mid b$ آن گاه $(a, b) = a$ .	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۴۴	اگر $a > ۱$ ، $a \mid ۹k + ۴$ و $a \mid ۵k + ۳$ ، ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۴۵	اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + ۴$ یا $a + ۲$ یا $a$ بر ۳ بخش پذیر است.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰
۴۶	درست یا نادرست بودن گزاره زیر را مشخص کنید. حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۰
۴۷	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف: اگر $a$ و $b$ اعدادی صحیح و $a$ مخالف صفر است. اگر $a \mid b$ آن گاه عدد .....، شمارنده عدد..... است. ب: $m$ عددی صحیح است. حاصل $(۲m, ۶m^۳)$ برابر با ..... است.		خرداد ۱۴۰۰
۴۸	ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۳$ و $p = ۴k + ۱$ نوشته می شود.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰



دی ۹۹	۰/۲۵	گزاره های درست را مشخص کرده و برای گزاره های نادرست ، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی $a, b$ ، اگر $a b$ آن گاه $[a, b] =  b $	۴۹
دی ۹۹	۱	اگر باقیمانده تقسیم اعداد $a, b$ بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد ، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.	۵۰
دی ۹۹	۱/۲۵	اگر $a$ عدد طبیعی باشد ، حاصل $(2a + 3, 5a + 4)$ را به دست آورید.	۵۱
خرداد ۹۹	۱/۲۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد $a$ بر ۴ برابر ۳ باشد ، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را بدست آورید.	۵۲
خرداد ۹۹	۱	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n 9k + 7$ و $n 7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 5$ یا $n = 1$	۵۳
خرداد ۹۹	۰/۵ ۰/۵	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گوئیم $a$ و $b$ دو عدد ..... هستند. ب: اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با ..... است.	۵۴
خرداد ۹۹	۱/۲۵	اگر $a 5m - 2$ و $a 3m + 1$ ، برای $a$ چند جواب طبیعی وجود دارد؟	۵۵
خرداد ۹۹	۱/۲۵	اگر باقیمانده تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده $2a - 1$ تقسیم بر ۳۱ را بدست آورید.	۵۶
خرداد ۹۹	۰/۷۵	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2 - 1$ را بیابید.	۵۷
شهریور ۹۹	۱/۲۵	فرض کنیم $a$ و $n$ دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a 2n + 3$ و $a 3n + 4$ نشان دهید $a = 1$	۵۸
شهریور ۹۹	۱/۵	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می شود. ( $k \in \mathbb{W}$ )	۵۹



شهریور ۹۹	۱/۲۵	اگر باقیمانده تقسیم اعداد $m$ و $n$ بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۶۰
خرداد ۹۸	۱/۵	اگر باقیمانده تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۶۱
خرداد ۹۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 b^2$ آنگاه $a b$	۶۲
خرداد ۹۸	۰/۲۵	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه های زیر است؟ $([m^2, m], m^5) = \dots$ الف : $m$ ب : $m^5$ ج : $m^5$ د : $m^2$	۶۳
خرداد ۹۸	۰/۵	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد ۱۲۷- بر ۱۵ باقیمانده برابر ..... و خارج قسمت ..... است.	۶۴
تیر ۹۸	۱/۲۵	اگر عددی مانند $k$ در $Z$ باشد به طوری که $4k+1$ ، ثابت کنید $25 16k^2+28k+6$	۶۵
تیر ۹۸	۰/۵	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[12, (6, 8)]$ برابر ..... خواهد شد.	۶۶
تیر ۹۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k-1$ نوشت. ( $k \in Z$ )	۶۷
شهریور ۹۸	۰/۵	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. ۱) $a c$ و $b c$ ۲) $\forall m > 0$ و ....	۶۸
شهریور ۹۸	۱/۵	اگر باقیمانده تقسیم $a$ بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد ، باقی مانده تقسیم عدد $a$ را بر ۳۰ بیابید.	۶۹
دی ۹۸	۱	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $a 4k+9$ و $a 6k+14$ صدق کند ، مقدار $a$ را بیابید.	۷۰
دی ۹۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a b$ ، آنگاه $[a, b] =  a $	۷۱



دی ۹۸	۱	فرض کنید $a$ عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^2]$ را بدست آورید.	۷۲
دی ۹۷	۱	اگر $a > 1$ و $a   9k + 4$ ، $a   5k + 3$ ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۷۳
دی ۹۷	۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.	۷۴
دی ۹۷	۱/۲۵	پاسخ سوال زیر را بدست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $b   a + 2$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید.	۷۵
<b>درس سوم : هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها</b>			
دی ۱۴۰۱	۱/۵	باقی مانده تقسیم عدد $200! + 199! + 198! + \dots + 3! + 2! + 1!$ را بر ۱۵ بدست آورید. ( ! نماد فاکتوریل می باشد )	۷۶
دی ۱۴۰۱	۱	معادله هم نهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را بدست آورید.	۷۷
شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۷۸
شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است او به سوالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است ( پاسخ به هر سوال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد ). این دانش آموز به چه صورتهایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۷۹
خرداد ۱۴۰۱ خ	۰/۲۵	پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. پ) معادله هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $((a, m)   b - (a, b)   m)$	۸۰
خرداد ۱۴۰۱ خ	۰/۷۵	بدون انجام عمل تقسیم، باقی مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر ۹ تعیین کنید.	۸۱



۸۲	اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد ، در این صورت ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی است ؟	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۸۳	همه اعداد صحیح مانند $a$ را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشند .	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۸۴	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید . پ) برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $m$ ، اگر باقی مانده تقسیم $a$ بر $m$ مساوی با $r$ باشد ، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$ .	۰/۲۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۸۵	باقی مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید.	۱	خرداد ۱۴۰۱ خ
۸۶	اگر در یک سال ، اول مهر شنبه باشد ، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است ؟	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱ خ
۸۷	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = d$ آن گاه رابطه $(a \equiv b, a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}})$ برقرار خواهد بود.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۰
۸۸	معادله سیاله $6x + 7y = 185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۷۵	دی ۱۴۰۰
۸۹	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف : اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم دو عدد $a$ و $b$ بر $m$ مساوی اند. ب : منظور از حل معادله هم نهستی ، پیدا کردن همه جواب های حقیقی است که در معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۹۰	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند ، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۰



شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۹۱
خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵	باقیمانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.	۹۲
خرداد ۱۴۰۰	۱	معادله $7x \equiv 1 \pmod{4}$ را حل کنید.	۹۳
دی ۹۹	۱/۲۵	باقیمانده تقسیم $(38^{26} + 19)$ را بر ۴ به دست آورید.	۹۴
دی ۹۹	۱	معادله همنهشتی $8x \equiv 20 \pmod{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۹۵
خرداد ۹۹	۱/۵	باقی مانده تقسیم $7^{30}$ بر ۱۵ را بدست آورید.	۹۶
خرداد ۹۹	۱/۲۵	معادله همنهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۹۷
خرداد ۹۹	۱/۷۵	معادله سیاله $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله سیاله فوق دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله سیاله داده شده را بیابید.	۹۸
شهریور ۹۹	۱/۲۵	رقم یکان عدد $2^{11} + 7$ را بدست آورید.	۹۹
شهریور ۹۹	۱	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۱۰۰
شهریور ۹۹	۱	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$	۱۰۱



۱۰۲	اگر در یک سال ، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن ، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱	خرداد ۹۸
۱۰۳	با تبدیل معادله سیاله ی خطی $5x + 2y = 18$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن ، جواب های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۱۰۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف : اگر $a \equiv b^m$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b^n$ ب : باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.	۰/۵	خرداد ۹۸
۱۰۵	در جای خالی کلمه ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد ، ۳۱ مرداد همان سال ..... است.	۰/۲۵	خرداد ۹۸
۱۰۶	جوابهای عمومی معادله سیاله ی خطی $7x + 5y = 11$ را حل کنید.	۱	خرداد ۹۸
۱۰۷	جواب عمومی معادله $4x \equiv 17^5$ را بدست آورید.	۱	تیر ۹۸
۱۰۸	باقیمانده تقسیم $27^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۰۹	با تبدیل معادله سیاله خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن ، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵	شهریور ۹۸
۱۱۰	باقیمانده تقسیم $13^{22}$ را بر ۱۷ به دست آورید.	۱	دی ۹۸
۱۱۱	ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد . به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح $a, b, c$ عدد طبیعی $m$ ، آنگاه $ac \equiv bc^m$	۱	دی ۹۸
۱۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. معادله هم نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است ، اگر و تنها اگر $(a, b) m$	۰/۲۵	دی ۹۸
۱۱۳	جواب های عمومی معادله ی سیاله ی خطی $9x + 13y = 7$ را بدست آورید.	۱/۵	دی ۹۸

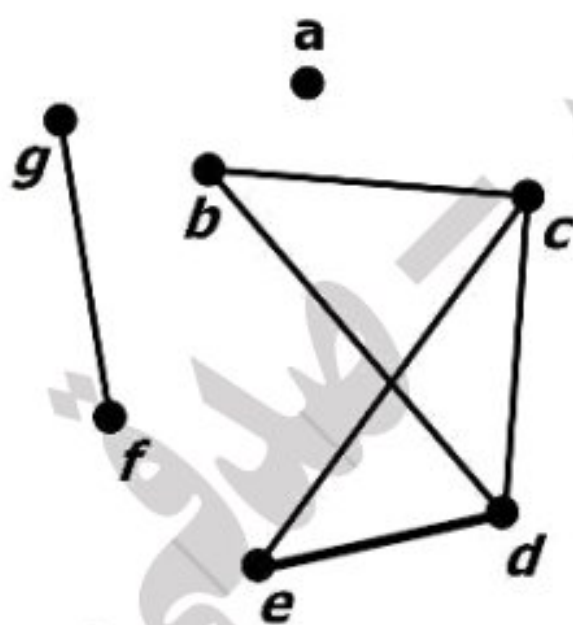


۱۱۴	پاسخ سوال زیر را بدست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقیمانده تقسیم عدد $A = 1000^{12} \times 12 + 10$ بر ۷ را بدست آورید.	۱	دی ۹۷
۱۱۵	معادله هم نهشتی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱	دی ۹۷

## فصل دوم: گراف و مدل سازی

### درس اول: معرفی گراف

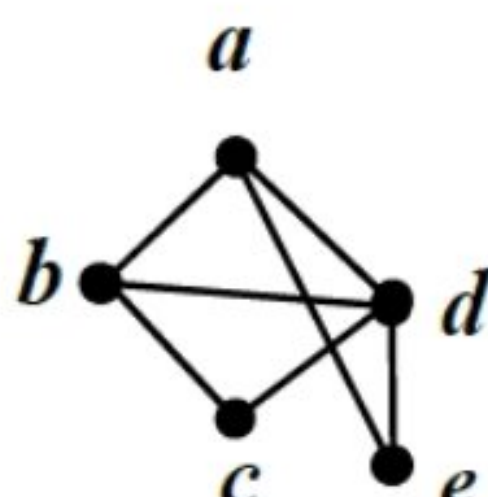
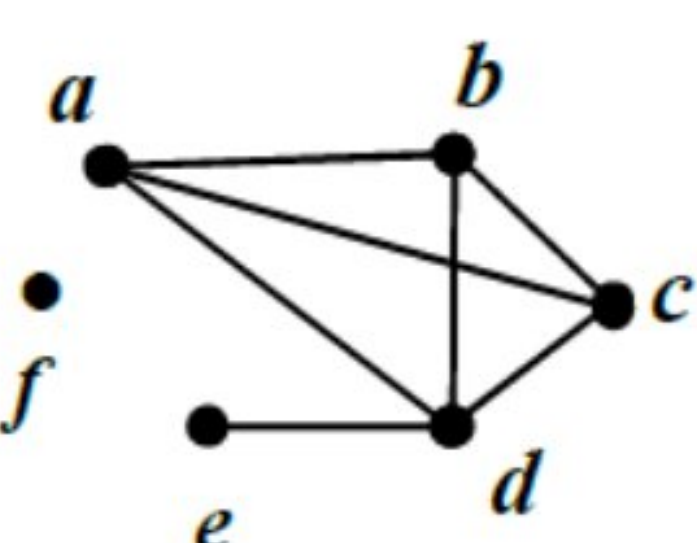
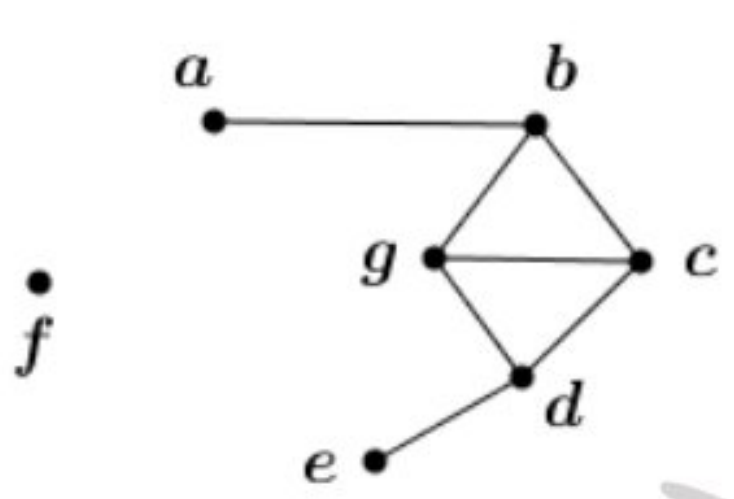
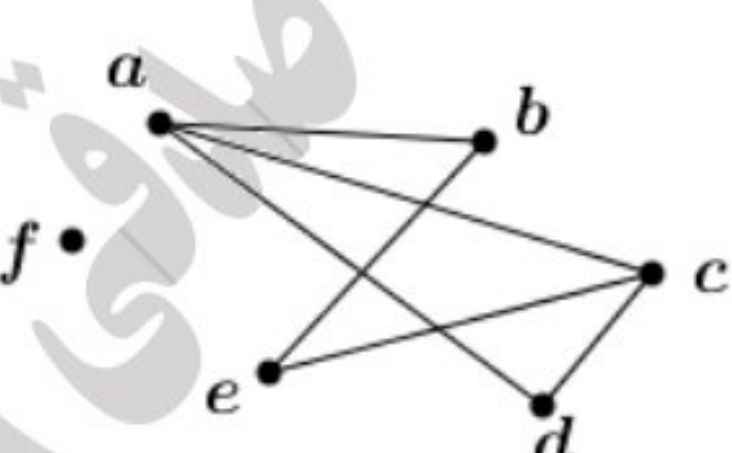
۱۱۶	در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید. تعداد یالهای گراف $K_n$ ، برابر ..... است.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱
۱۱۷	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ( الف ) تعداد رئوس یک گراف را ( اندازه، مرتبه ) می نامیم. ( ب ) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو راس آن یک ( مسیر، یال ) وجود داشته باشد. ( پ ) اگر $G$ یک گراف $n$ راسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1))$ است. ( ت ) گراف $C_n$ تنها یک ( دور، مسیر ) $n$ راسی دارد.	۲	دی ۱۴۰۱
۱۱۸	گراف $G$ (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: ( الف ) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ( ب ) دوری به طول ۴ بنویسید. ( پ ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس $b$ بنویسید. ( ت ) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵	دی ۱۴۰۱



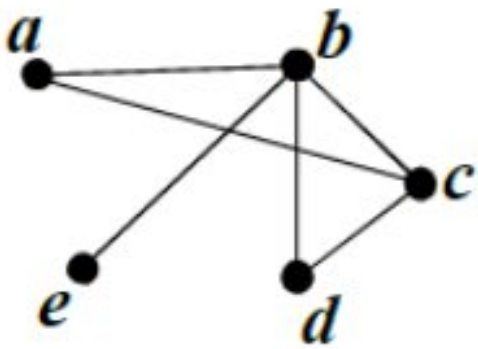
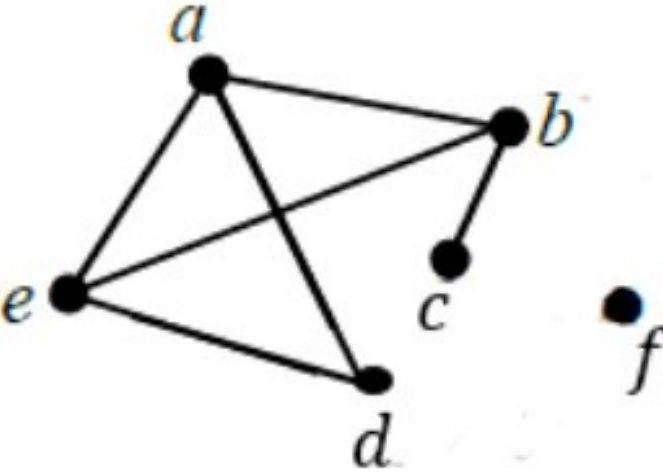


شهریور ۱۴۰۱	۲/۲۵	<p>با توجه به گراف <math>G</math> ( شکل مقابل ) ، به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف : مسیر به طول ۳ از <math>a</math> به <math>c</math> بنویسید.</p> <p>ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>پ : درجه راس <math>a</math> در گراف <math>\bar{G}</math> را تعیین کنید.</p> <p>ت : آیا گراف <math>G</math> همبند است؟ دلیل ارائه کنید.</p> <p>ث : <math>N_G(f)</math> را معین کنید.</p>	۱۱۹
شهریور ۱۴۰۱	۱	<p>به سوالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید.</p> <p>الف : یک گراف کامل ۱۱ راسی چند یال دارد؟</p> <p>ب : در یک گراف از مرتبه ۸ با <math>\Delta = 3</math> ، حداقل چند راس برای احاطه همه رئوس لازم است ؟</p>	۱۲۰
خرداد ۱۴۰۱ خ	۱	<p>جاهای خالی را با کلمه مناسب پر کنید .</p> <p>الف) به راسی که درجه آن صفر است یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد ، رأس ..... می‌گوییم.</p> <p>ب) اگر یک یال ، یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید به آن یال ..... گفته می‌شود .</p> <p>پ) هرگاه بین هر دو رأس یک گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد ، آن گراف را ..... می‌نامیم.</p> <p>ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف ..... است .</p>	۱۲۱
خرداد ۱۴۰۱ خ	۱۲۵ ۰/۷۵ ۰/۷۵ ۰/۲۵ ۰/۱۵	<p>با توجه به گراف <math>G</math> ( شکل زیر ) به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) <math>\Delta(G)</math> را تعیین کنید.</p> <p>ب) <math>N_G[a]</math> را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>پ) یک دور به طول ۵ برای <math>a</math> بنویسید.</p> <p>ت) درجه رأس <math>c</math> در گراف مکمل چند است ؟</p> <p>ث) یک زیرگراف با سه یال رسم کنید .</p>	۱۲۲
خرداد ۱۴۰۱ خ	۱	<p>گراف کامل <math>K_p</math> دارای ۳۶ یال است . مرتبه گراف را مشخص کنید .</p>	۱۲۳
خرداد ۱۴۰۱	۱	<p>جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید .</p> <p>الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد ، آن را رأس ..... می‌نامیم.</p> <p>ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد ، هیچ یالی نداشته باشد ، گراف ..... می‌نامیم.</p> <p>پ) تعداد یال‌های گراف <math>K_4</math> ، برابر با ..... است .</p> <p>ت) گراف <math>G</math> را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد .</p>	۱۲۴



۱۲۵	به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید. الف) گراف $C_7$ را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید. ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.		۱ ۱۴۰۱ خرداد
۱۲۶	با توجه به گراف $G$ به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل $G$ چند یال دارد؟		۰/۷۵ ۰/۱۵ ۰/۷۵ دی ۱۴۰۰
۱۲۷	با توجه به گراف $G$ ( شکل مقابل )، به سوالات زیر پاسخ دهید. الف: مسیر به طول ۳ از $a$ به $c$ بنویسید. ب: یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ: درجه راس $a$ در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید. ت: آیا گراف $G$ همبند است؟ دلیل ارائه کنید. ث: $N_G(f)$ را معین کنید.		۲/۲۵ شهریور ۱۴۰۰
۱۲۸	گراف $G$ ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد راس های راف است. مرتبه گراف را بدست آورده و گراف $G$ را رسم کنید.		۱/۲۵ شهریور ۱۴۰۰
۱۲۹	گراف $G$ که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف: $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید. ب: بزرگترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام راس و چند است؟ پ: دوری به طول ۵ برای راس $a$ بنویسید. ت: آیا گراف $G$ همبند است؟		۲ ۱۴۰۰ خرداد
۱۳۰	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف: مرتبه گراف نشان دهنده تعداد ..... گراف می باشد. ب: اگر یک یال، یک راس را به خود آن راس وصل کند، این یال را ..... می نامیم. پ: دو یال را ..... می نامیم هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دوی آن ها را به هم متصل کند. ت: تعداد راس های فرد هر گراف عددی ..... است.		۱ دی ۹۹

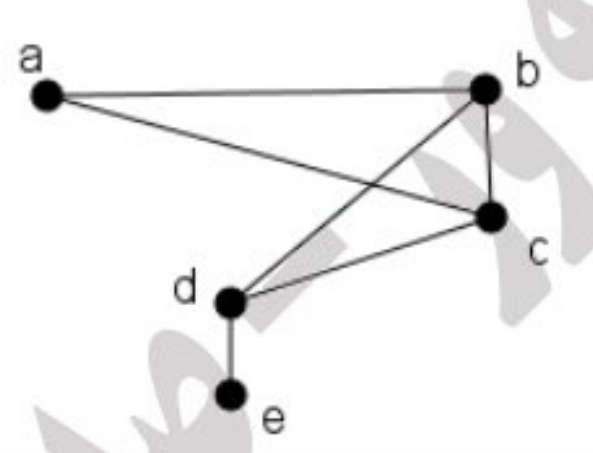
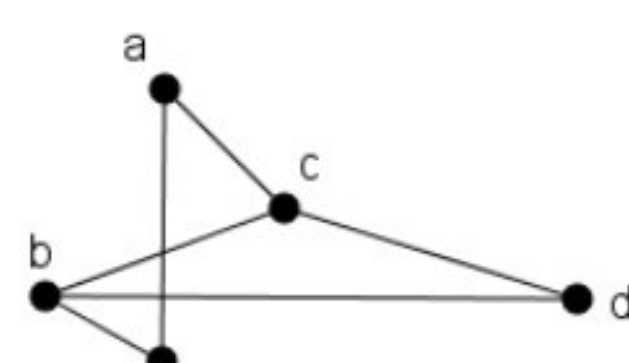


دی ۹۹	۲	 <p>گراف <math>G</math> به صورت مقابل را در نظر بگیرید.  الف: درجه راس <math>e</math> در گراف مکمل <math>G</math> چند است؟  ب: تمام دورهای موجود در گراف <math>G</math> را بنویسید.  پ: <math>\Delta(G)</math> را مشخص کنید.</p>	۱۳۱
دی ۹۹	۱	<p>الف: گراف <math>k</math>-منتظم را تعریف کنید.  ب: گراف <math>P_n</math> را رسم کنید.  پ: آیا گراف های <math>C_n</math> منتظم هستند؟</p>	۱۳۲
خرداد ۹۹	۰/۵	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.  الف: مجموع درجه های راس های هر گراف ..... تعداد یال ها است.  ب: در یک گراف <math>k</math>-منتظم، ماکزیمم درجه راس برابر با ..... است.</p>	۱۳۳
خرداد ۹۹	۱/۲۵	 <p>گراف <math>G</math> را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.  الف: <math>N_G[a]</math> را با اعضا مشخص کنید.  ب: یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.  پ: یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از <math>a</math> به <math>c</math> بنویسید.</p>	۱۳۴
خرداد ۹۹	۰/۷۵	<p>در گراف <math>G</math>، درجه راس <math>v</math> برابر ۹ است و درجه راس <math>\bar{v}</math> در گراف <math>\bar{G}</math> برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف <math>G</math> را مشخص کنید.</p>	۱۳۵
خرداد ۹۹	۱	<p>گراف <math>G</math>، ۶ راسی ۳-منتظم است.  الف: اندازه گراف <math>G</math> را بیابید.  ب: نمودار گراف <math>G</math> را رسم کنید.</p>	۱۳۶
خرداد ۹۹	۱	<p>ثابت کنید تعداد راس های فرد هر گراف، عددی زوج است.</p>	۱۳۷
خرداد ۹۹	۱	<p>در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.  الف: تعداد رئوس یک گراف را (اندازه - مرتبه) می نامیم.  ب: گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو راس آن یک (مسیر - یال) وجود داشته باشد.  پ: اگر <math>G</math> یک گراف <math>n</math> راسی باشد، مقدار <math>q(G) + q(\bar{G})</math> برابر با <math>(n-1)</math>، <math>\frac{n(n-1)}{2}</math> است.  ت: گراف <math>C_n</math> تنها یک (دور - مسیر) <math>n</math> راسی دارد.</p>	۱۳۸



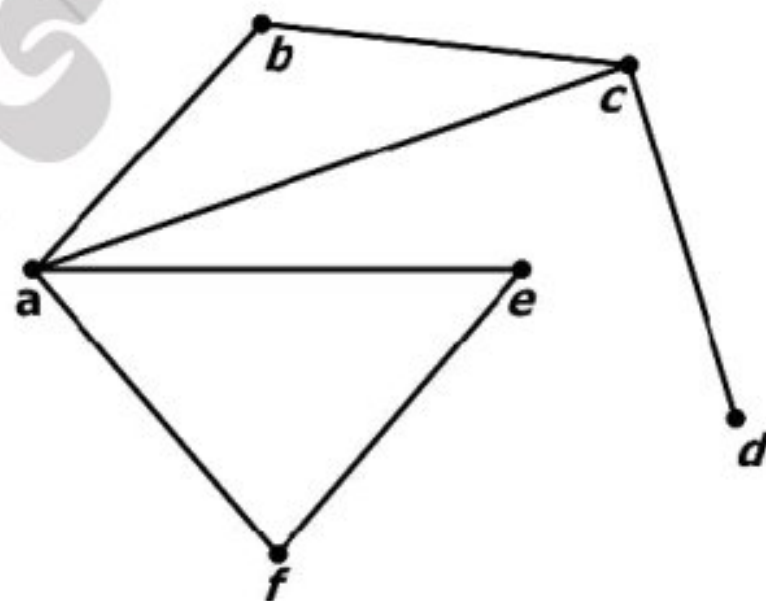
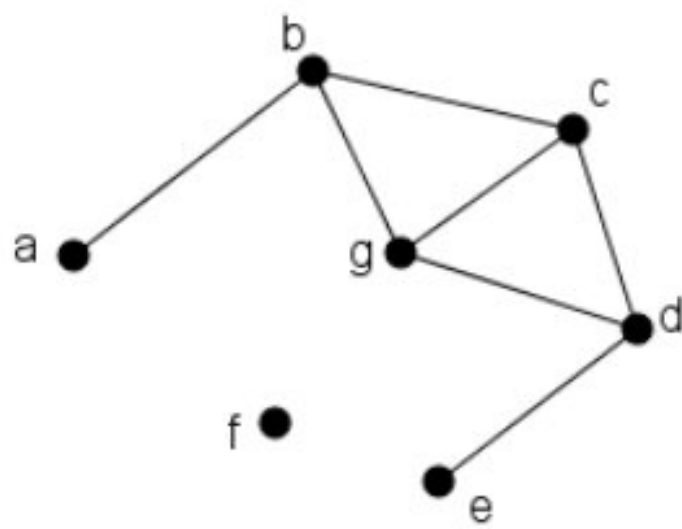
۱۳۹	گراف $G$ ( شکل مقابل ) را در نظر بگیرید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : دوری به طول ۴ برای $b$ بنویسید. پ : مکمل گراف $G$ را رسم کنید. ت : $N_G[e]$ را با اعضا مشخص کنید.	۲	خرداد ۹۹
۱۴۰	در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف $r$ -منتظم از مرتبه $p$ رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل ارائه کنید. الف : $r = ۲, p = ۵$ ب : $r = ۳, p = ۷$	۱	خرداد ۹۹
۱۴۱	گراف $G$ به صورت مقابل رسم شده است . به سوالات زیر پاسخ دهید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : سه دور به طول ۳ بنویسید. پ : ماکزیمم درجه در مکمل گراف $G$ چند است ؟ ت : $N_G[e]$ را با اعضا بنویسید. ث : آیا گراف $G$ همبند است ؟	۲/۵	شهریور ۹۹
۱۴۲	گراف کامل $K_p$ دارای ۱۰ یال است . ابتدا $p$ را بدست آورید ، سپس گراف را رسم کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۴۳	آیا گراف ۷ راسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۴۴	گراف $p_5$ را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱	شهریور ۹۹
۱۴۵	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. یگ گراف کامل ۸ راسی ، ..... یال دارد.	۰/۵	خرداد ۹۸
۱۴۶	شکل مقابل نمودار گراف $G$ می باشد. الف : مرتبه و اندازه گراف $G$ را بنویسید. ب : مجموعه $N_G[b]$ را بنویسید. ج : مجموع درجه های راس های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۱۴۷	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $G$ یک گراف $n$ راسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر ..... است .	۰/۵	تیر ۹۸



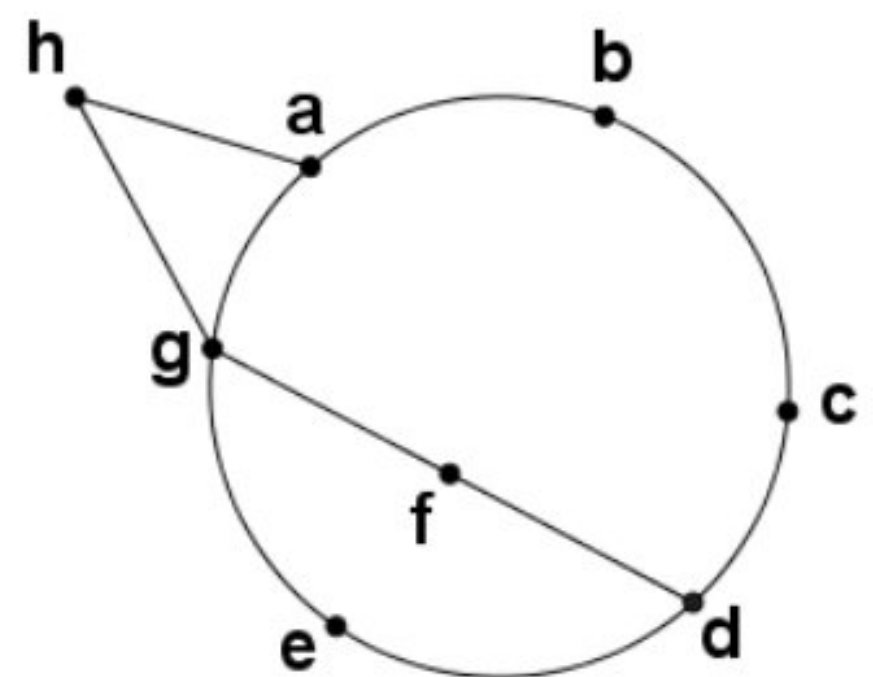
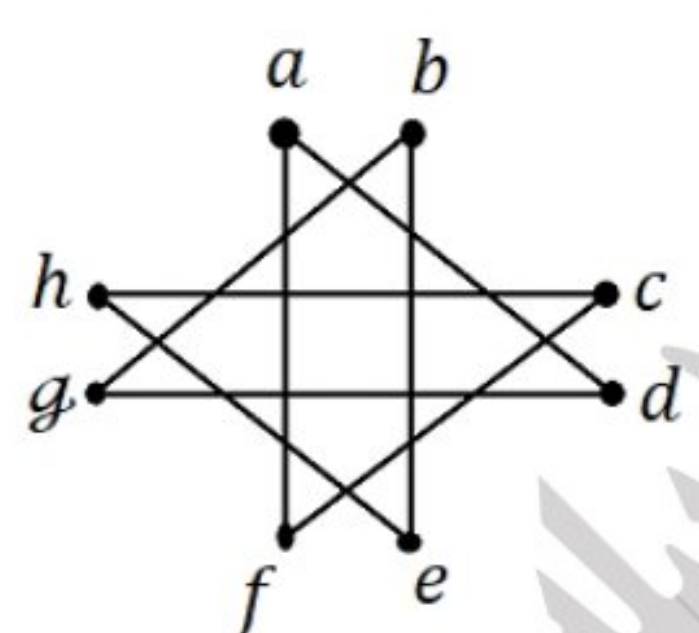
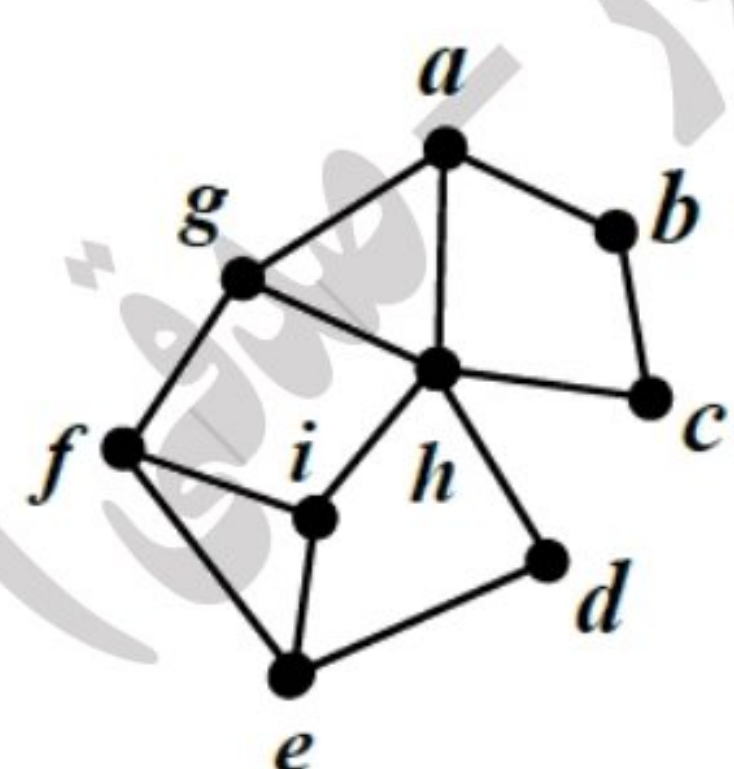
تیر ۹۸	۱/۵	 <p>گراف <math>G</math> را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.  الف : مجموعه رئوس و مجموعه ی یالها را بنویسید.  ب : در گراف <math>G</math> ، یک دور به طول ۳ بنویسید.  ج : درجه راس <math>e</math> را در گراف <math>\bar{G}</math> مشخص کنید.</p>	۱۴۸
تیر ۹۸	۰/۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.  مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>	۱۴۹
تیر ۹۸	۰/۵	<p>در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.  <math>p_n</math> گرافی است که تنها از یک مسیر ..... تشکیل شده است.</p>	۱۵۰
شهریور ۹۸	۲	<p>گراف <math>G</math> با مجموعه ی راس های <math>V = \{a, b, c, d, e, f\}</math> و مجموعه یالهای زیر را در نظر بگیرید.  <math>E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}</math>  الف : نمودار گراف را رسم کنید.  ب : <math>N_G[b]</math> را مشخص کنید.  ج : یک مسیر به طول ۵ از <math>b</math> به <math>d</math> بنویسید.</p>	۱۵۱
شهریور ۹۸	۱	<p>در هر مورد یک گراف <math>k</math> راسی غیر تهی <math>k</math> - منتظم رسم کنید ، به طوری که :  الف : <math>k</math> بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.  ب : <math>k</math> کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p>	۱۵۲
دی ۹۸	۰/۲۵	<p>درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.  تعداد راس های زوج هر گراف ، عددی فرد است.</p>	۱۵۳
دی ۹۸	۱/۲۵	 <p>گراف <math>G</math> به صورت مقابل است را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.  الف : <math>\delta(G)</math> را مشخص کنید.  ب : اندازه گراف را تعیین کنید.  پ : مجموعه همسایگی بسته راس <math>b</math> را بنویسید.  ت : اگر <math>N_G(d) = \{e, x, b\}</math> باشد . <math>x</math> کدام است؟</p>	۱۵۴
دی ۹۸	۱	<p>هر یک از موارد زیر را پاسخ دهید.  الف : گراف <math>k</math> - منتظم از مرتبه ی <math>n</math> را تعریف کنید.  ب : آیا گراف ۳- منتظم از مرتبه ی ۵ وجود دارد؟ دلیل خود را بنویسید.</p>	۱۵۵
دی ۹۸	۱	<p>گراف <math>G</math> به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.  الف : دوری به طول ۵ مشخص کنید.  ب : مکمل گراف <math>G</math> را رسم کنید.</p> 	۱۵۶



۱۵۷	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیکسبرگ یک گراف ساده است. ب : گراف ۳- منتظم از مرتبه ی ۵ قابل رسم نیست.	۰/۱۵	دی ۹۷
۱۵۸	ثابت کنید تعداد راس های فرد هر گراف ، عددی زوج است.	۱	دی ۹۷
۱۵۹	با توجه به گراف شکل مقابل (گراف $G$ ) به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ : درجه ی راس $a$ در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید. ت : آیا گراف $G$ همبند است ؟ چرا؟ ث : یک زیر گراف تهی ۵ راسی ، از گراف $G$ رسم کنید.	۱/۵	دی ۹۷
۱۶۰	گراف $G$ با مجموعه ی راس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یالهای $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : مجموعه ی همسایگی های باز راس $d$ را بنویسید. ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید. ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است ؟	۱	دی ۹۷
۱۶۱	گراف کامل $K_p$ دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ , $\delta(G)$ را تعیین کنید.	۱	دی ۹۷
<b>درس دوم : مدل سازی با گراف</b>			
۱۶۲	در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید . یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد ، احاطه گر ..... می نامیم.	۰/۲۵	دی ۱۴۰۱
۱۶۳	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید .	۱	دی ۱۴۰۱



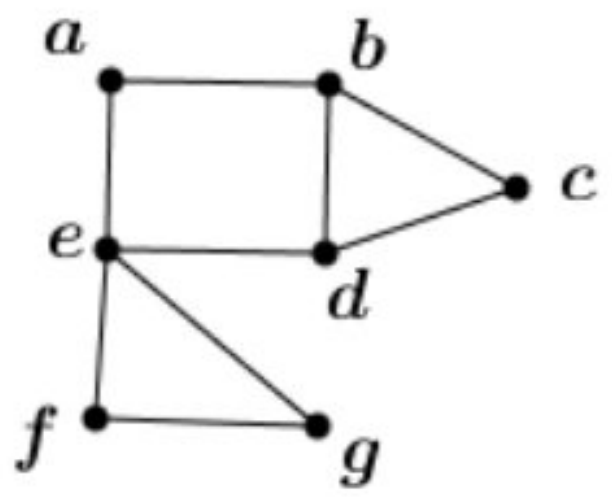
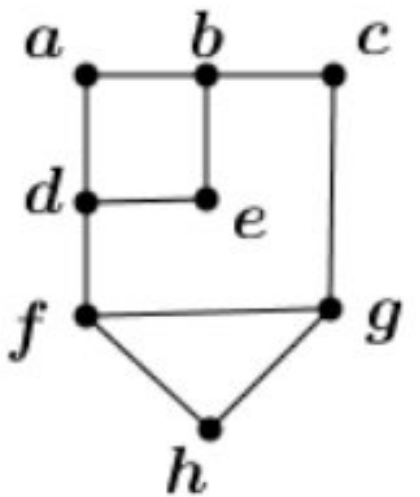
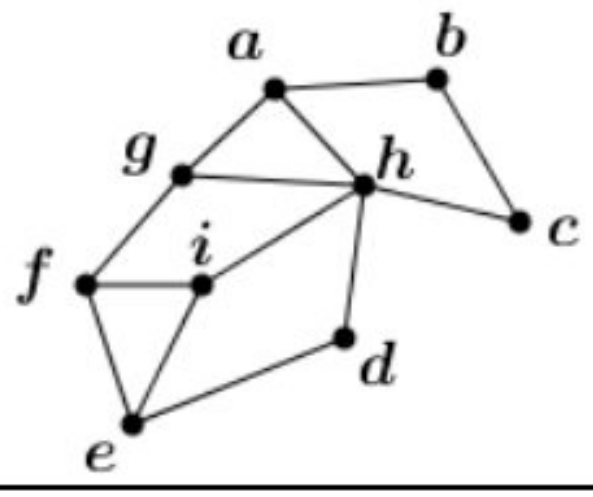
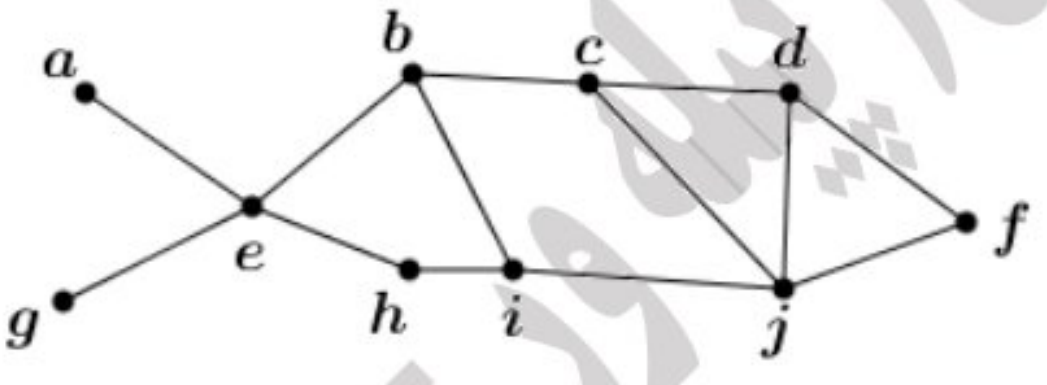
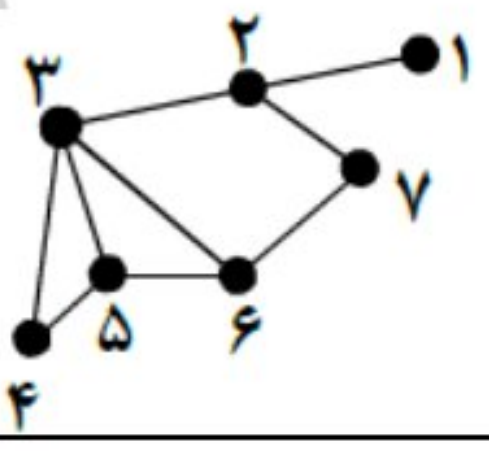


دی ۱۴۰۱	۱	یک گراف ۲- منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱۶۴
شهریور ۱۴۰۱	۱/۵	<p>به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید .</p> <p>الف) گراف <math>C_8</math> را رسم کنید .</p> <p>ب : یک <math>\gamma</math>- مجموعه از آن مشخص کنید.</p> <p>پ : یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴- عضوی از آن مشخص کنید.</p>	۱۶۵
شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵	<p>با توجه به گراف <math>(G)</math> به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف : عدد احاطه‌گری مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۱۶۶
خرداد ۱۴۰۱	۱/۵	<p>عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل ، تعیین کنید .</p> 	۱۶۷
خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵	<p>الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید .</p> <p>ب) برای گراف شکل روبه‌رو ، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید .</p> 	۱۶۸



۱۶۹	عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل ، تعیین کنید .	۱/۲۵	۱۴۰۱ خرداد
۱۷۰	ابتدا گراف $P_9$ را رسم کنید . سپس یک مجموعه احاطه گر مینیمم از آن را مشخص کنید .	۱	۱۴۰۱ خرداد
۱۷۱	گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید . الف) یک $\gamma$ - مجموعه مشخص کنید . ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید .	۱/۵	۱۴۰۱ خرداد
۱۷۲	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) هر مجموعه احاطه گر مینیمال، یک مجموعه احاطه گر مینیمم است. ب) اگر $G$ یک گراف $n$ رأسی با ماکزیمم درجه $\Delta$ باشد آن گاه $\gamma(G) > \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ . پ) در گراف $p_n$ عدد احاطه گری برابر با $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ است. ت) $\lceil 3/48 \rceil = 4$	۱	۱۴۰۰ دی
۱۷۳	عدد احاطه گری گراف $G$ ( شکل مقابل ) را با ارائه راه حل تعیین کنید.	۱/۵	۱۴۰۰ دی
۱۷۴	گراف $C_{10}$ را رسم کنید. الف) یک $\gamma$ - مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.	۱/۵	۱۴۰۰ دی

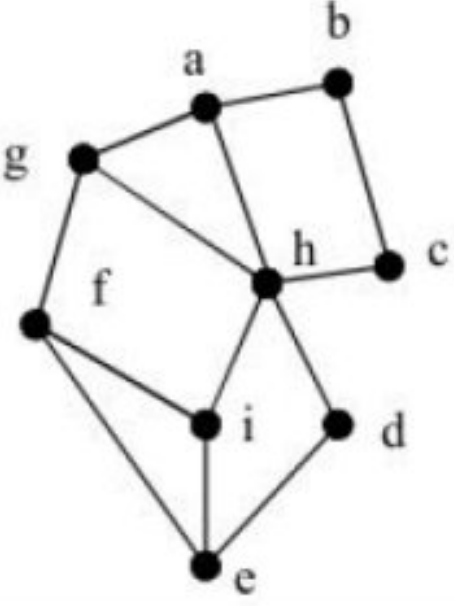
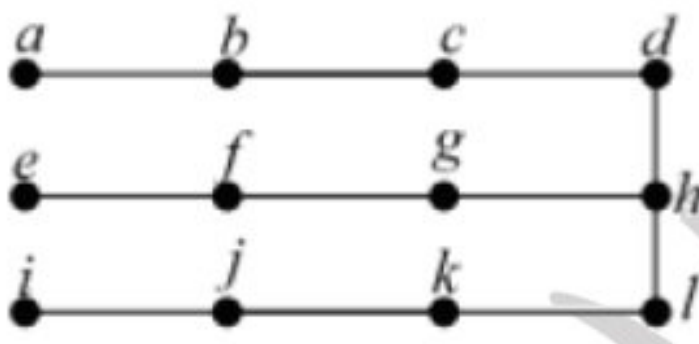
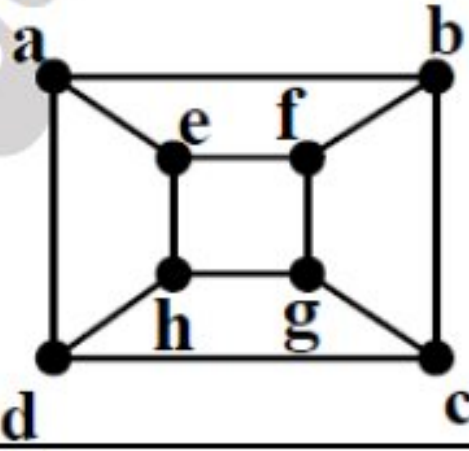
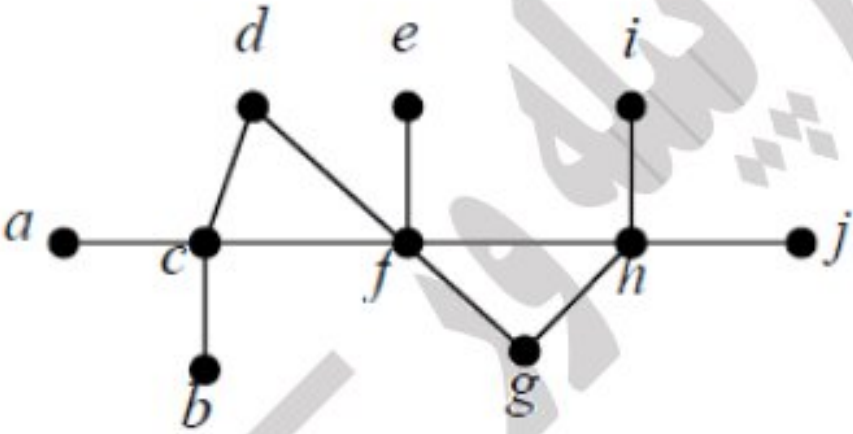
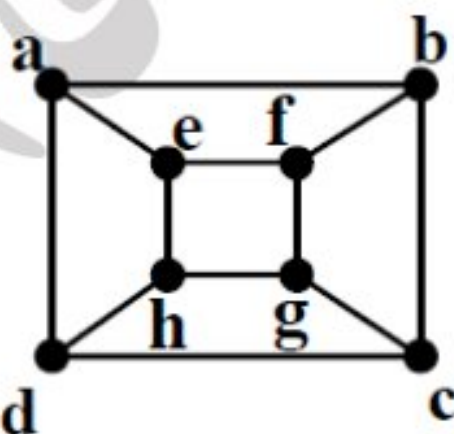


شهریور ۱۴۰۰	۱/۵	<p>عدد احاطه گری شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.</p> 	۱۷۵
شهریور ۱۴۰۰	۱	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۱۷۶
خرداد ۱۴۰۰	۱	<p>تفاوت بین مجموعه احاطه گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.</p>	۱۷۷
خرداد ۱۴۰۰	۱	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۱۷۸
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	<p>عدد احاطه گری شکل زیر را با ارائه راه حل تعیین کنید.</p> 	۱۷۹
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	<p>الف: یک گراف ۶ راسی که <math>\gamma</math>-مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید. ب: الف: یک گراف ۶ راسی که <math>\gamma</math>-مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.</p>	۱۸۰
دی ۹۹	۲	<p>در گراف <math>G</math> که در شکل آن در مقابل داده شده است: الف: یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب: عدد احاطه گری <math>G</math> را تعیین کنید.</p> 	۱۸۱



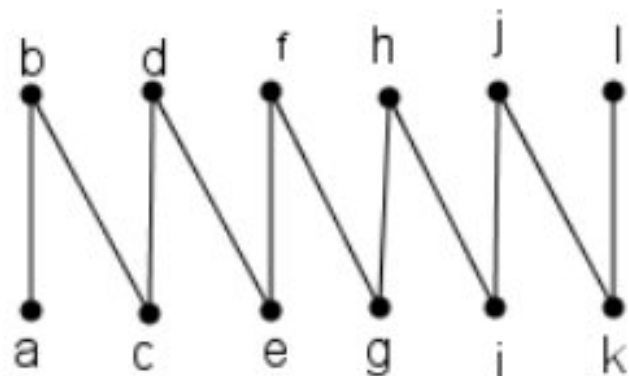
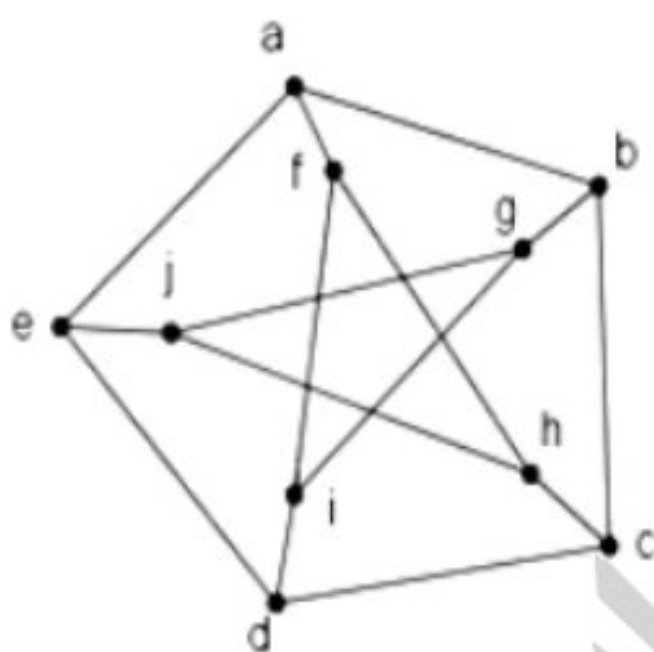
شهریور ۹۹	۱/۵		۱۸۲	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید.
خرداد ۹۹	۱/۲۵		۱۸۳	عدد احاطه گری گراف زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
خرداد ۹۹	۰/۷۵		۱۸۴	مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.
خرداد ۹۹	۱		۱۸۵	<p>گراف ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که :</p> <p>الف : مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشید.</p> <p>ب : بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشید.</p>
خرداد ۹۹	۱/۲۵		۱۸۶	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.
دی ۹۸	۱/۲۵		۱۸۷	<p>اگر <math>n</math> رئوس گراف و <math>\Delta</math> ماکزیمم درجه ی گراف باشد.</p> <p>الف : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر <math>\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil</math> است.</p> <p>ب : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از <math>\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil</math> باشد.</p>
دی ۹۸	۱/۲۵		۱۸۸	<p>برای گراف روبرو :</p> <p>الف : یک مجموعه احاطه گر با ۴ عضو مشخص کنید.</p> <p>ب : مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمال باشد.</p>



شهریور ۹۸	۱	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از راس ها ، آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.</p> 	۱۸۹
شهریور ۹۸	۱/۵	<p>الف : گراف <math>P_8</math> را رسم کنید.          ب : یک <math>\gamma</math>-مجموعه از آن را مشخص کنید.          ج: یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱۹۰
خرداد ۹۸	۱	<p>الف : گراف ۶ راسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن یک باشد.          ب : گراف ۶ راسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ بوده و مجموعه احاطه گری مینیمم آن یکتا باشد.</p>	۱۹۱
خرداد ۹۸	۱/۵	<p>عدد احاطه گری گراف های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک <math>\gamma</math>-مجموعه بنویسید.          الف:           ب:   </p>	۱۹۲
خرداد ۹۸	۱/۵	<p>در گراف شکل مقابل :          الف : یک مجموعه احاطه گر بنویسید.          ب: یک مجموعه احاطه گر مینیمال بنویسید.          پ : یک مجموعه احاطه گر مینیمم بنویسید.</p> 	۱۹۳
خرداد ۹۸	۱	<p>مفاهیم زیر را تعریف کنید.          الف : مجموعه احاطه گر          ب: عدد احاطه گری</p>	۱۹۴
تیر ۹۸	۱	<p>در گراف شکل مقابل :          الف : یک مجموعه احاطه گر مینیمم مشخص کنید.          ب : یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۱۹۵
تیر ۹۸	۱/۵	<p>اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ راسی برابر یک باشد ، در این صورت <math>V(G)</math> و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف <math>G</math> می تواند داشته باشد را مشخص کنید.</p>	۱۹۶



۱۹۷	در هر قسمت ، گراف خواسته شده را رسم کنید. الف : یک گراف ۲ منتظم اگر مرتبه ی ۸ که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن داشته باشد. ب : یک گراف ۵ راسی که $\gamma$ -مجموعه آن با اندازه یک باشد. ج : یک گراف ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.	۱/۵	تیر ۹۸
۱۹۸	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف : یک $\gamma$ -مجموعه در گراف $P_5$ ، دارای ۲ عضو است. ب: تعداد کمتر از $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ راس نمی تواند تمام $n$ راس گراف را احاطه کنند.	۰/۵	تیر ۹۸
۱۹۹	جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید. عدد احاطه گری گراف $C_6$ برابر ..... می باشد.	۰/۵	تیر ۹۸
۲۰۰	الف : یک گراف ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب : یک گراف ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.	۱	خرداد ۹۸
۲۰۱	الف : ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر غیر مینیمال را می توان با حذف برخی رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد. ب : در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال را مشخص کنید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۲۰۲	گراف $C_7$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف : یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. ب: عدد احاطه گری $C_7$ را به دست آورید. ج: دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵	خرداد ۹۸
۲۰۳	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف : در یک گراف از مرتبه ی ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل ..... راس برای احاطه ی همه رئوس لازم است. ب : اگر در گراف $G$ از مرتبه ی $P$ داشته باشیم ، $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر ..... است.	۱	خرداد ۹۸
۲۰۴	گراف $P_{12}$ در شکل مقابل رسم شده است. الف : یک $\gamma$ -مجموعه از این گراف مشخص کنید. ب: یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱	دی ۹۷





## فصل سوم : ترکیبیات (شمارش)

### درس اول : مباحثی در ترکیبیات

دی ۱۴۰۱	۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید : دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد .	۲۰۵
دی ۱۴۰۱	۱	می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم . اگر بخواهیم هر نفر رو به روی برادرش بنشیند ، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد ؟	۲۰۶
دی ۱۴۰۱	۱/۷۵	به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه ، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم ۳ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۴ شاخه انتخاب کنیم ؟	۲۰۷
دی ۱۴۰۱	۱/۲۵	قرار است سه مدرس $T_1$ و $T_2$ و $T_3$ در سه جلسه متوالی در سه کلاس $C_1$ و $C_2$ و $C_3$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند . برای این منظور ، با استفاده از مربع لاتین ، برنامه‌ریزی کنید .	۲۰۸
شهریور ۱۴۰۱	۱	به چند طریق می‌توان ۴۵ دانش آموز را در چهار کلاس ۸ نفره ، ۱۰ نفره ، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد ؟	۲۰۹
شهریور ۱۴۰۱	۱	برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.	۲۱۰
شهریور ۱۴۰۱	۱/۵	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \quad (x_i \geq 0 \text{ و } 1 \leq i \leq 4 \text{ و } x_5 = 2)$	۲۱۱
شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵	دو مربع لاتین متعامد $3 \times 3$ را بنویسید . (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید.)	۲۱۲



۲۱۳	می‌خواهیم با ارقام ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۹ یک عدد ۷ رقمی تولید کنیم، به طوری که: (الف) اعداد زوج کنار هم باشند. (ب) هیچ دو عدد زوجی کنار هم نباشند.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۴	به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار داد؟	۱	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۵	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۶	(الف) مربع لاتین $A$ را در نظر بگیرید. سطر اول و سوم مربع $A$ را جابه‌جا کنید تا مربع لاتین $B$ حاصل شود. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) آیا دو مربع لاتین $A$ و $B$ متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۷	۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: (الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. (ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۸	با ارقام ۱، ۱، ۱، ۳، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟	۱	خرداد ۱۴۰۱
۲۱۹	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟	۱/۵	خرداد ۱۴۰۱



۲	۲۲۰	<p>الف) مربع لاتین <math>A</math> را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت <math>\begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}</math> مربع لاتین <math>B</math> را به دست آورید.</p> $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ <p>ب) آیا دو مربع لاتین <math>A</math> و <math>B</math> متعامدند؟ دلیل بیاورید.</p>
دی ۱۴۰۰	۲۲۱	<p>می خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ث» و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آن ها حروف کنار هم باشند.</p>
دی ۱۴۰۰	۲۲۲	<p>با حروف کلمه <u>جیرجیرک</u> چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت؟</p>
دی ۱۴۰۰	۲۲۳	<p>به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟</p>
دی ۱۴۰۰	۲۲۴	<p>در مربع لاتین (شکل زیر) جای سطر اول و سوم را باهم جابه جا کنید تا مربع لاتین <math>B</math> ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا <math>A</math> و <math>B</math> دو مربع لاتین متعامد هستند؟</p> $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
شهریور ۱۴۰۰	۲۲۵	<p>می خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟</p>
شهریور ۱۴۰۰	۲۲۶	<p>کوتاه پاسخ دهید. علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که: الف: علی و حسین کنار هم باشند. ب: ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.</p>
شهریور ۱۴۰۰	۲۲۷	<p>معادله <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15</math> چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که <math>x_1 &gt; 2, x_4 \geq 4</math> باشد؟</p>



شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵	الف : تمام مربع هاب لاتین $2 \times 2$ را بنویسید. ب : آیا دو مربع لاتین $2 \times 2$ متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.	۲۲۸
خرداد ۱۴۰۰	۱	کوتاه پاسخ دهید. می خواهیم با حروف "ب" و "ج" و ارقام ۸, ۶, ۵, ۴, ۲, ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم . مطلوبست: الف : تعداد رمزهایی که هریک از آن ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب: تعداد رمزهایی که در آن ها حروف کنار هم باشند.	۲۲۹
خرداد ۱۴۰۰	۲	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم : از گل نوع اول حداقل یک شاخه ، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۲۳۰
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵	مربع لاتین $A$ را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع $A$ را جابجا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را $B$ نام گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین $A$ و $B$ را بررسی کنید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	۲۳۱
دی ۹۹	۱	با ارقام ۴, ۳, ۷, ۸, ۶ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که : الف : اعداد زوج کنار هم باشند. ب : اعداد فرد کنار هم باشند.	۲۳۲
دی ۹۹	۱/۵	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد ، به شرطی آن که $x_5 = 2$ , $x_2 > 2$ باشند	۲۳۳
دی ۹۹	۲	مربع لاتین $A$ را در نظر بگیرید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ الف : با اعمال یک جایگشت روی درایه های مربع لاتین $A$ ، مربع لاتین $B$ را تولید کنید. ب : متعامد بودن دو مربع لاتین $A$ و $B$ را بررسی کنید.	۲۳۴
شهریور ۹۹	۰/۷۵	هشت نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ، سه نفره ، چهارنفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۲۳۵



شهریور ۹۹	۱/۲۵	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد ، به شرطی آن که $x_1 \geq 1$ ، $x_3 > 3$ باشند	۲۳۶																		
شهریور ۹۹	۰/۵	یک مربع لاتین چرخشی $4 \times 4$ بنویسید.	۲۳۷																		
شهریور ۹۹	۱	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید. <table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr></table> <table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲۳۸
۱	۲	۳																			
۳	۱	۲																			
۲	۳	۱																			
۱	۲	۳																			
۲	۳	۱																			
۳	۱	۲																			
خرداد ۹۹	۱	با ارقام ۱۱۳۲۸۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت.(ساده کردن پاسخی نهایی الزامی نیست . )	۲۳۹																		
خرداد ۹۹	۱/۵	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد ، به شرطی آن که $x_2 > 2$ ، $x_5 \geq 4$ باشند.	۲۴۰																		
خرداد ۹۹	۱	یک مربع لاتین چرخشی $4 \times 4$ بنویسید.	۲۴۱																		
خرداد ۹۹	۰/۷۵	با ارقام عدد ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۳ ، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۲۴۲																		
خرداد ۹۹	۱/۲۵	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد ، اگر بخواهیم ، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۲۴۳																		
خرداد ۹۹	۱	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ یک مربع لاتین جدید بدست آورید. <table><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr></table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲۴۴		
۲	۱	۴	۳																		
۴	۳	۲	۱																		
۳	۴	۱	۲																		
۱	۲	۳	۴																		



۲۴۵	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱	۹۹ خرداد
۲۴۶	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم ، به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار یزند ، به طوری که : الف : هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب : همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱	۹۹ خرداد
۲۴۷	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد ؟ ( به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱	۹۹ خرداد
۲۴۸	۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان در کنار هم در یک ردیف قرار داد ، به طوریکه : الف : کتابها یک در میان قرار گیرند؟ ب : کتاب های ریاضی کنار هم و کتابهای فیزیک نیز کنارهم باشند؟	۱/۲۵	۹۸ دی
۲۴۹	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی به شرط آن که $x_1 > 2, x_3 > 3$ دارد؟ چرا ؟	۱	۹۸ دی
۲۵۰	با حروف کلمه ی " می سی سی پی " چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می توان نوشت؟	۱	۹۸ دی
۲۵۱	بررسی کنید ، آیا دو مربع لاتین روبرو متعامدند؟ چرا ؟	۰/۷۵	۹۸ دی
۲۵۲	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که : الف :همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.	۱/۵	۹۸ شهریور
۲۵۳	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ با شرط $x_2 > 4, x_5 \geq 4$ را محاسبه کنید.	۱	۹۸ شهریور



شهریور ۹۸	۱	قرار است چهار مدرس $T_1, T_2, T_3, T_4$ در چهار جلسه ی متوالی در چهار کلاس $C_1, C_2, C_3, C_4$ به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.	۲۵۴																
تیر ۹۸	۱	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟	۲۵۵																
تیر ۹۸	۱/۵	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ , $x_1 > 2$ , $x_5 \geq 4$	۲۵۶																
تیر ۹۸	۱	۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.	۲۵۷																
تیر ۹۸	۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 3$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی $n$ وجود ندارد.	۲۵۸																
تیر ۹۸	۱/۵	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید.	۲۵۹																
خرداد ۹۸	۲	الف: به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟ ب: اگر از هر نوع گل حداقل یکی انتخاب شود، به چند طریق می توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد؟	۲۶۰																
خرداد ۹۸	۰/۵	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲ می توان ساخت برابر ..... است.	۲۶۱																
خرداد ۹۸	۱	برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟ <table border="1" data-bbox="513 1670 884 1956"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۲۶۲
۴	۲	۱	۳																
۳	۱	۲	۴																
۱	۴	۳	۲																
۲	۳	۴	۱																
خرداد ۹۸	۱	۶ دانش آموز پایه ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه ی یازدهم به چند طریق می توانند کنارهم در یک ردیف قرار یابند؟ به طوری که: الف: به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب: همواره دانش آموزان یازدهم کنارهم باشند. ج: یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۲۶۳																
خرداد ۹۸	۱	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟	۲۶۴																



۲۶۵	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0 \quad i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.	۱	۹۸ خرداد
۲۶۶	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع داریه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با.....است.	۰/۵	۹۸ خرداد
۲۶۷	اگر سه دوست هم سائز ، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هریک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقا یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقا یکبار مورد استفاده قرار بگیرد ، بنویسید که چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵	۹۸ خرداد
۲۶۸	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ در این صورت چند کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم ( متمایز ) از $A$ و سه رقم ( متمایز ) از $B$ باشد؟	۱	۹۷ دی
۲۶۹	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد ، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟	۱	۹۷ دی
۲۷۰	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱/۵	۹۷ دی

### درس دوم : روشهایی برای شمارش

۲۷۱	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N}   1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟	۱/۵	۱۴۰۱ دی
۲۷۲	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم ، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است .	۱/۲۵	۱۴۰۱ دی
۲۷۳	تعداد توابع یک به یک ، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. ( راه حل نوشته شود )	۱/۲۵	۱۴۰۱ شهریور
۲۷۴	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از یک است .	۱	۱۴۰۱ شهریور
۲۷۵	به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟	۰/۷۵	۱۴۰۱ خرداد



۲۷۶	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از یک است .
۲۷۷	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱	به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد ؟
۲۷۸	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۱	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند ، لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است .
۲۷۹	۱/۵	دی ۱۴۰۰	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ ، $(1 \leq n \leq 300)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟
۲۸۰	۱	دی ۱۴۰۰	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟
۲۸۱	۱/۵	شهریور ۱۴۰۰	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(1 \leq n \leq 200)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟
۲۸۲	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۰	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان در هفته ، یکسان است؟
۲۸۳	۱/۷۵	خرداد ۱۴۰۰	در یک کلاس ۳۴ نفری ، ۱۵ نفر فوتبال ، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند . اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال ، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال ، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
۲۸۴	۱	خرداد ۱۴۰۰	الف : به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب : به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟
۲۸۵	۱	خرداد ۱۴۰۰	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی است که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟
۲۸۶	۱/۵	دی ۹۹	مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید . چند عدد در $S$ وجود دارند؟ به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.



دی ۹۹	۱	حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آن ها مانند هم و غیر تکراری است؟	۲۸۷
شهریور ۹۹	۱	در یک کلاس ۲۵ نفری ، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال ، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.	۲۸۸
شهریور ۹۹	۱	تعداد تابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چندتا است ؟ ( با ذکر دلیل )	۲۸۹
شهریور ۹۹	۱	۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند ، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر ( با قرعه کشی ) به دلخواه بدهیم . این عمل به چند طریق امکان پذیر است ؟ ( یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)	۲۹۰
شهریور ۹۹	۱	نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.	۲۹۱
خرداد ۹۹	۱/۷۵	چند عدد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n < 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۷ بخش پذیر نباشد؟	۲۹۲
خرداد ۹۹	۱	الف : چند تابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی می توان تعریف کرد؟ ب : چند تابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی وجود دارد؟	۲۹۳
خرداد ۹۹	۰/۷۵	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان در هفته یکسان است؟	۲۹۴
خرداد ۹۹	۱	در بین اعداد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۲۹۵
خرداد ۹۹	۱	در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۲۹۶
خرداد ۹۹	۱	قرار است ۳ کارگر $W_1$ ، $W_2$ ، $W_3$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریزی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به ونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه ریزی کنید.	۲۹۷



دی ۹۸	۰/۲۵	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۶ است.	۲۹۸
دی ۹۸	۱/۷۵	با استفاده از اصل شمول و عدم شمول ، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید.	۲۹۹
دی ۹۸	۱	$A$ را در نظر بگیرید . نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ مجموعه اعداد دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.	۳۰۰
شهریور ۹۸	۱/۵	چند عدد طبیعی مانند $n$ به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟	۳۰۱
شهریور ۹۸	۱/۵	۱۳ نقطه درون یک مستطیل $6 \times 8$ قرار دارند . نشان دهید ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم ، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.	۳۰۲
خرداد ۹۸	۱/۵	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟	۳۰۳
خرداد ۹۸	۱/۵	چند عدد وجود دارد که: $(1 \leq n \leq 400)$ بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ الف : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب : فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟	۳۰۴
خرداد ۹۸	۱/۵	یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم . نشان دهید اگر ۱۰ نقطه ی دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله ی آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.	۳۰۵
تیر ۹۸	۱/۵	چند عدد طبیعی مانند $n$ به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشد؟ ( بر ۳ بخش پذیر نباشد و بر ۴ بخش پذیر نباشد).	۳۰۶
تیر ۹۸	۱/۲۵	تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزی چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟	۳۰۷
خرداد ۹۸	۱/۲۵	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.	۳۰۸
خرداد ۹۸	۱/۲۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند ، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۳۰۹
دی ۹۷	۲	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم ؟ ( راه حل نوشته شود).	۳۱۰



دی ۹۷	۱/۵	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ ( سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)	۳۱۱
-------	-----	---	-----

امیدواریم این فایل در جهت پیشبرد اهداف آموزشی مورد استفاده همکاران و دانش آموزان گرامی قرار بگیرد.

نظرات و پیشنهادات خود را می توانید در سایت [www.math-pilevar.ir](http://www.math-pilevar.ir) ثبت کنید.

### گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان اردبیل

رقیه پيله ور - میکائيل صدقی

دی ۱۴۰۱



# پاسخ سوالات موضوعی نهایی

## "ریاضیات گسسته"

پایه دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک

آخرین آپدیت: دی ماه ۱۴۰۱

گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان اردبیل

رقیه پيله ور - میکائیل صدقی

[www.math-pilevar.ir](http://www.math-pilevar.ir)

[www.artamath.blogfa.com](http://www.artamath.blogfa.com)



## فصل ۱ : آشنایی با نظریه اعداد

### درس اول : استدلال ریاضی

ردیف	پاسخ	بارم
۱	الف) درست ب) نادرست	۰/۲۵
۲	$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$ (ص ۸ و ۷) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است $\Rightarrow (x+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$	۱
۳	الف : نادرست ، مثال نقض $n = 3$ (۰/۵) ب : درست (۰/۲۵) ، اثبات (۰/۲۵) $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ (تمرین صفحه ۸)	۱
۴	اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. (۰/۲۵) پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند. (۰/۲۵) در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد. (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسئله : مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. (۰/۲۵) با توجه با تناقض ایجاد شده ، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. (۰/۲۵) (مثال صفحه ۶)	۱/۲۵
۵	الف : نادرست ب : درست پ : درست ت : درست	۱
۶	$n = 2k - 1 \Rightarrow (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 = 4k^2 - 14k + 13$ $= 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 = 2k' + 1$	۱
۷	(مثال صفحه ۴) $n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$	۱
۸	گنگ	۰/۲۵



۱/۵	فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. تناقض با فرض $\alpha - \beta = m \in Q$ $\alpha + \beta = n \in Q \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q$	۹
۱	فرض کنید $r$ یک عدد گویا و $x$ یک عدد گنگ باشد، نشان می دهیم $x + r$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $x + r$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویاست. پس تفاضل $x + r$ و $r$ باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می گردد.	۱۰
۰/۲۵	نادرست	۱۱
۱/۲۵	گزاره همواره درست $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$	۱۲
۰/۲۵	نادرست	۱۳
۱/۵	فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. تناقض با فرض $\alpha - \beta = m \in Q$ $\alpha + \beta = n \in Q \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q$	۱۴
۱/۷۵	الف: نادرست $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c$ ب: درست $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$	۱۵
۱	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مساله درست است.	۱۶
۱	فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست و $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}, a, b \in Z, a, b \neq 0$ با معکوس کردن این تساوی داریم: $x = \frac{b}{a}$ ، پس $x$ هم گویاست که این با فرض گنگ بودن $x$ در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.	۱۷
۱	الف: نادرست      ب: درست      پ: نادرست      ت: نادرست	۱۸
۱/۲۵	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ناابرابری آخر برای $a, b$ نامنفی همیشه درست. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.	۱۹



۱	<p>اگر دو عدد نامنفی باشند ، حکم چنین خواهد بود <math>\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}</math></p> $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ <p>چون تمام مراحل اثبات ، بازگشت پذیر هستند لذا حکم درست است.</p>	۲۰
۱	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ <p>نامساوی بدست آمده همیشه درست است . چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند ، پس حکم مسئله درست است.</p>	۲۱
۱	<p>با توجه به فرد بودن عدد <math>ab</math> نتیجه می گیریم هر دو عدد <math>a, b</math> فرد هستند ، لذا با فرض صحیح بودن اعداد <math>m</math> و <math>n</math> می توان در نظر رفت <math>a = 2n - 1</math> و <math>b = 2m - 1</math> بنابراین :</p> $a^2 + b^2 = (2n-1)^2 + (2m-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 = 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$ <p>پس <math>a^2 + b^2</math> یک عدد زوج است.</p>	۲۲
۱/۲۵	<p>فرض کنید <math>r</math> یک عدد گویا و <math>x</math> یک عدد گنگ باشد ، نشان می دهیم <math>x+r</math> یک عدد گنگ است . فرض کنید که <math>x+r</math> گنگ نباشد (فرض خلف ) . بنابراین عددی گویا است . از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا ، گویاست . پس تفاضل <math>x+r</math> و <math>r</math> باید عددی گویا باشد . یعنی <math>(r+x-r) \in \mathbb{Q}</math> و از آنجا <math>x \in \mathbb{Q}</math> که با فرض ما در تناقض است . در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می گردد.</p>	۲۳
۰/۷۵ ۱	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ <p>چون رابطه آخر درست است ، پس با بازگشت روابط ، حکم مسئله درست است.</p>	۲۴
۰/۱۵	<p>الف : درست ب: نادرست</p>	۲۵
۱/۵	<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow$ $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$ <p>همیشه درست</p> <p>چون رابطه آخر درست است ، پس با بازگشت روابط ، حکم مسئله درست است.</p>	۲۶
۰/۲۵	درست	۲۷



۱/۲۵	۲۸	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا است. در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ اما با توجه به فرض مسئله $\beta$ گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.
۱	۲۹	ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$ $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$ چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.
<b>درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح</b>		
۰/۲۵	۳۰	نادرست
۱/۲۵	۳۱	$\begin{aligned} a 6(\Delta m + 4) &\Rightarrow a 5(6m + 5) - 6(\Delta m + 4) \Rightarrow a 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ a 5(6m + 5) &\quad (ص ۱۱) \end{aligned}$
۱	۳۲	می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می باشد ( $k \in \mathbb{Z}$ ) پس داریم $\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \Rightarrow r = 7$ (ص ۱۶)
۰/۵	۳۳	الف) $m^2$ ب) نسبت به هم اول
۰/۷۵	۳۴	$\begin{aligned} a 5k + 9 &\Rightarrow a 40k + 72 \Rightarrow a 7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7 \\ a 8k + 13 &\Rightarrow a 40k + 65 \end{aligned}$
۱	۳۵	$\begin{cases} a = 6q_1 + 3 \\ a = 7q_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a = 42q_1 + 21 \\ 6a = 42q_2 + 30 \end{cases} \Rightarrow a = 42(q_1 - q_2 - 1) + 33 \Rightarrow r = 33$
۰/۷۵	۳۶	الف: $\nexists b$ ب: $m \leq d$ ت: $x \in [3]_4$



۱/۲۵	$\left. \begin{array}{l} a 9k+4 \xrightarrow{\times 5} a 45k+20 \\ a 5k+3 \xrightarrow{\times 9} a 45k+27 \end{array} \right\} \Rightarrow a (45k+20) - (45k+27) \Rightarrow a 20-27 \Rightarrow$ $\Rightarrow a -7 \xrightarrow{a>1} a=7 \quad 9$	۳۷
۰/۷۵	<p>الف) نادرست ( ویژگی ۴ صفحه ۱۱ )          ب) درست ( تعریف ک.م.م صفحه ۱۳ )          ت) نادرست ( مثال صفحه ۱۳ )</p>	۳۸
۰/۷۵	<p>( سؤال ۴ صفحه ۱۶ )</p> $\left. \begin{array}{l} 5 4k+1 \Rightarrow 25 16k^2+8k+1 \\ 5 4k+1 \Rightarrow 25 20k+5 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 25 16k^2+28k+6$	۳۹
۰/۵	<p>ب : <math>a mb</math>      پ : <math> a </math></p>	۴۰
۱/۵	$a=2k+1 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=4 \times 2q+1=8q+1 \Rightarrow r=1$	۴۱
۱/۲۵	$a=bq+r, 0 \leq r < b \Rightarrow a-bq=r \Rightarrow \begin{cases} n a \\ n b \end{cases} \Rightarrow n a-bq \Rightarrow n r$	۴۲
۰/۵	<p>الف : درست      ب : نادرست</p>	۴۳
۱	$a 9(5k+3)-5(9k+4) \Rightarrow a 27-20 \Rightarrow a 7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in P$	۴۴
۱/۵	<p>طبق الگوریتم تقسیم داریم :</p> <p>که بر ۳ بخش پذیر است. یا <math>a=3k</math>          که بر ۳ بخش پذیر است. یا <math>a+2=3(k+1)</math>          که بر ۳ بخش پذیر است. <math>a+4=3(k+2)</math></p>	۴۵
۰/۲۵	<p>درست</p>	۴۶
۰/۷۵	<p>الف : عدد <math>a</math> شمارنده عدد <math>b</math> است.      ب : <math>2m</math></p>	۴۷



۰/۷۵	<p>۱: <math>p = 4k</math> عددی زوج است</p> <p>۲: <math>p = 4k + 1</math></p> <p>۳: <math>p = 4k + 2 = 2(2k + 1)</math> عددی زوج است</p> <p>۴: <math>p = 4k + 3</math></p> <p>در حالت ۱ و ۳، <math>p</math> عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود</p>	۴۸
۰/۲۵	درست	۴۹
۱	$\begin{cases} a = 17q + 5 \\ b = 17q + 3 \end{cases} \Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q - 15 = 17(2 - 5q - 1) + 12 = 17k + 12$ $\Rightarrow r = 12$	۵۰
۱/۲۵	$(\Delta a + 4, 2a + 3) = d \Rightarrow \begin{matrix} d   2a + 3 \\ d   \Delta a + 4 \end{matrix} \Rightarrow d   -2(\Delta a + 4) + 5(2a + 3) \Rightarrow d   7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 7$	۵۱
۱/۲۵	$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q + 1 \Rightarrow r = 1$	۵۲
۱	$\begin{matrix} n   9k + 7 \\ n   7k + 6 \end{matrix} \Rightarrow n   -63k - 49 + 63k + 54 \Rightarrow n   5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } n = 5$	۵۳
۱	الف: نسبت به هم اول ب: $ b $	۵۴
۱/۲۵	$\begin{matrix} a   5m - 2 \\ a   3m + 1 \end{matrix} \Rightarrow a   -3(5m - 2) + 5(3m + 1) \Rightarrow a   -15m + 6 + 15m + 5 \Rightarrow a   11 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 11$	۵۵
۱/۲۵	<p>باقیمانده <math>a \equiv 19 \Rightarrow 2a \equiv 38 \equiv 7 \Rightarrow 2a \equiv 7 \Rightarrow 2a - 1 \equiv 6</math></p>	۵۶
۰/۷۵	$d = (4k, 16k^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} d   4k \\ d   16k^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow d   16k^2 \Rightarrow d   16k^2 - (16k^2 - 1) \Rightarrow d   1 \Rightarrow d = 1$	۵۷
۱/۲۵	$\begin{matrix} a   3n + 4 \\ a   2n + 3 \end{matrix} \Rightarrow a   -2(3n + 4) + 3(2n + 3) \Rightarrow a   1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$	۵۸



۱/۵	<p>هر گاه <math>p</math> را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:</p> <p>(۱) <math>p = 6k</math> , (۲) <math>p = 6k + 1</math> , (۳) <math>p = 6k + 2 = 2(3k + 1)</math> , (۴) <math>p = 6k + 3</math> , (۵) <math>p = 6k + 4 = 2(k + 2)</math> , (۶) <math>p = 6k + 5</math></p> <p><math>p</math> در حالت های ۱ و ۳ و ۵ زوج و در حالت ۴ ، بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن <math>p</math> تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶ ، <math>p</math> می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود.</p>	۵۹
۱/۲۵	$\begin{aligned} m &= 17q + 5 \quad (q \in \mathbb{Z}) \\ n &= 17q' + 3 \quad (q' \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2 - 5q') - 5 \Rightarrow$ $(2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$	۶۰
۱/۵	$\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ 5n = 13(5q_2) + 45 \end{cases} \Rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39 \Rightarrow$ $5n - 3m = 13q' + 3(13) \Rightarrow 5n - 3m = 0 \Rightarrow r = 0$	۶۱
۰/۲۵	نادرست	۶۲
۰/۲۵	گزینه د ، یعنی $m^2$ درست است.	۶۳
۰/۵	باقیمانده ۸ ، خارج قسمت ۹- است.	۶۴
۱/۲۵	$\begin{aligned} 5 4k+1 &\Rightarrow 5^2 (4k+1)^2 \Rightarrow 25 16k^2+8k+1 \\ 5 4k+1 &\Rightarrow 25 20k+5 \end{aligned} \Rightarrow 25 (16k^2+8k+1) + (20k+5) \Rightarrow$ $\Rightarrow 25 16k^2+28k+6$	۶۵
۰/۵	۱۲	۶۶
۰/۲۵	نادرست	۶۷
۰/۵	$\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$	۶۸
۱/۵	$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 30q_1 + 12 \\ 5a = 30q_2 + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q - 3 \Rightarrow a = 30r + 27$	۶۹



۱	$\begin{aligned} a 4k+9 &\Rightarrow a -6(4k+9)+4(6k+14) \Rightarrow a 2 \xrightarrow{a>1} a=2 \\ a 6k+14 &\end{aligned}$	۷۰
۰/۲۵	نادرست	۷۱
۱	$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2, \quad B = 35a^2 = 5 \times 7 \times a^2 \Rightarrow [A, B] = 105a^2$	۷۲
۱	$\begin{aligned} a 9k+4 &\Rightarrow a 5(9k+4) \Rightarrow a 45k+20 \\ a 5k+3 &\Rightarrow a 9(5k+3) \Rightarrow a 45k+27 \Rightarrow a (45k+20)+(45k+27) \Rightarrow a 7 \xrightarrow{a>1} a=7 \end{aligned}$	۷۳
۰/۲۵	درست	۷۴
۱/۲۵	عدد $a$ عددی فردی است. بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b a+2$ . بنابراین $b$ نیز عددی فرد خواهد بود. می دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است. پس: $a^2 + b^2 + 3 = (8m+1) + (8n+1) + 3 = 8(m+n) + 5 \Rightarrow r = 5$	۷۵
<b>درس سوم: هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها</b>		
۱/۵	(ص ۲۹) می دانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و ... $15! \equiv 0$ پس داریم: $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 15! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$	۷۶
۱	(ص ۳۰) چون $(12, 8)   20$ معادله جواب دارد $4x^6 \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$	۷۷
۱/۲۵	عدد $n$ رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0}$ را بسط می دهیم (۰/۲۵) و در همنهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم (۰/۲۵) (فعالیت صفحه ۲۲). $A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times A_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$ $\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$	۷۸



۱/۷۵	$\Delta x + 3y = 42 \Rightarrow \Delta x \equiv 42 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 3k \Rightarrow \Delta(3k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -\Delta k + 14$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">مشابه مثال صفحه ۲۸</p>	۷۹														
۰/۲۵	$(a, m)   b$	۸۰														
۰/۷۵	$1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2 \equiv 21 \equiv 3$	۸۱														
۱	<table border="1"><thead><tr><th>شنبه</th><th>یکشنبه</th><th>دو شنبه</th><th>سه شنبه</th><th>چهار شنبه</th><th>پنج شنبه</th><th>جمعه</th></tr></thead><tbody><tr><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td></tr></tbody></table> $(29 + 4 \times 30 + 7) \equiv 1 + 4 \times 2 + 0 \equiv 2$ <p style="text-align: right;">هفت اسفند روز دوشنبه می باشد.</p>	شنبه	یکشنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸۲
شنبه	یکشنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۱	$11   \Delta a + 9 \Rightarrow \Delta a + 9 = 11k \Rightarrow \Delta a = 11k - 9 \Rightarrow a = \frac{11}{\Delta}k - \frac{9}{\Delta}, \quad k \in Z$	۸۳														
۰/۲۵	پ) درست ( تذکر مهم صفحه ۲۱ )	۸۴														
۱	<p>( مشابه مثال صفحه ۲۱ )</p> $27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^{13} \equiv 1, \quad 18 = 13 \times 1 + 5, \quad 18 \equiv 5$ $\Rightarrow (27)^{20} + 18 \equiv 1 + 5 \Rightarrow r = 6$	۸۵														
۱/۲۵	<p>فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با : ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان ، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن ؛ یعنی</p> $131 = 29 + 3 \times 30 + 12 \equiv 5 \pmod{131}. \text{ بنابراین طبق جدول زیر } 12 \text{ بهمن پنجشنبه است.}$ <p>( قسمت ۱ فعالیت صفحه ۲۴ )</p> <table border="1"><thead><tr><th>ج</th><th>پ</th><th>چ</th><th>س</th><th>د</th><th>ی</th><th>ش</th></tr></thead><tbody><tr><td>۶</td><td>۵</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۰</td></tr></tbody></table>	ج	پ	چ	س	د	ی	ش	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۸۶
ج	پ	چ	س	د	ی	ش										
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰										
۰/۲۵	$\frac{m}{d} \equiv b \pmod{a}$	۸۷														



۱/۷۵	$6x \equiv 185 \pmod{7} = 23 \times 7 + 24 \Rightarrow 6x \equiv 24 \pmod{7} \xrightarrow{(6,7)=1} x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 4$ $\Rightarrow 6(k+4) + 7y = 185 \Rightarrow y = -6k + 23$	۸۸
۰/۵	الف : درست ب : نادرست	۸۹
۱	$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow r = 4$	۹۰
۱/۵	$2y \equiv 18 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow y = 5k + 4 \Rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18 \Rightarrow x = -2k + 2$	۹۱
۰/۷۵	$1000 \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow 1000^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow r = 2$	۹۲
۱	$7x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \Rightarrow 7x \equiv 21 \pmod{4} \xrightarrow{(7,4)=1} x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 3$	۹۳
۱/۲۵	$38 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 38^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 38^{26} \equiv 0 \pmod{4}, 19 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 38^{26} + 19 \equiv 3 \pmod{4}$	۹۴
۱	$12x \equiv 20 \pmod{32} \xrightarrow{(12,32)=4} x \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow x = 8k + 5$	۹۵
۱/۵	$7^2 = 49 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \pmod{15} \xrightarrow{7^{15} \equiv 7} 7^3 \equiv 4 \pmod{15}$	۹۶
۱/۲۵	$2 \equiv 35 \pmod{11} \Rightarrow 5x \equiv 35 \pmod{11} \xrightarrow{(5,11)=1} x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k + 7$	۹۷
۱/۷۵	<p>الف : ۱/۱۹ <math>\Rightarrow (4,3)=1</math></p> <p>ب :</p> $4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 3 + 1 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x - 1 = 3k + 1$ $4(3k + 1) + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \Rightarrow 3y = -12k + 15 \Rightarrow y = -4k + 5$	۹۸
۱/۲۵	$25 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \equiv 5 \pmod{10}$ <p>رقم يکان برابر ۵ است.</p>	۹۹



۱	$2x \equiv 19 \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3$	۱۰۰														
۱	$a \equiv^m b \Rightarrow m a-b \Rightarrow m (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv^m b^n$	۱۰۱														
۱	<p>روز اول مهر ، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم . ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن ، فاصله ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است . که روی هم ۱۳۱ روز می شوند . حال باقی مانده ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می کنیم که برابر ۵ است . لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است .</p> <table><tr><td>شنبه</td><td>یکشنبه</td><td>دوشنبه</td><td>سه شنبه</td><td>چهارشنبه</td><td>پنجشنبه</td><td>جمعه</td></tr><tr><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td></tr></table>	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۰۲
شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۱/۵	$\begin{aligned} 5x + 2y = 18 &\Rightarrow 2y \equiv 18 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow y \equiv 5 + 4 \pmod{5} \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} y = 5k + 4 \\ 5x + 2y = 18 &\xrightarrow{y=5k+4} 5x + 2(5k+4) = 18 \Rightarrow x = -2k + 2 \end{aligned}$	۱۰۳														
۰/۵	الف : درست ب: درست	۱۰۴														
۰/۲۵	چهارشنبه	۱۰۵														
۱	$\begin{aligned} 7x \equiv 11 \pmod{5} &\Rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 21 \pmod{5} \xrightarrow{(7,5)=1} x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3 \quad k \in \mathbb{Z} \\ 7x + 5y = 11 &\xrightarrow{x=5k+3} 7(5k+3) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k - 2 \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$	۱۰۶														
۱	$4x \equiv 17 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 15 + 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 12 \pmod{5} \xrightarrow{(4,5)=1} x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$	۱۰۷														
۱/۵	$27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 27^7 \equiv 1^7 \pmod{13} \Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 1 + 19 \pmod{13} \Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 20 \pmod{13} \Rightarrow 27^7 + 19 \equiv 7 \pmod{13}$	۱۰۸														
۱/۵	$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 5$	۱۰۹														



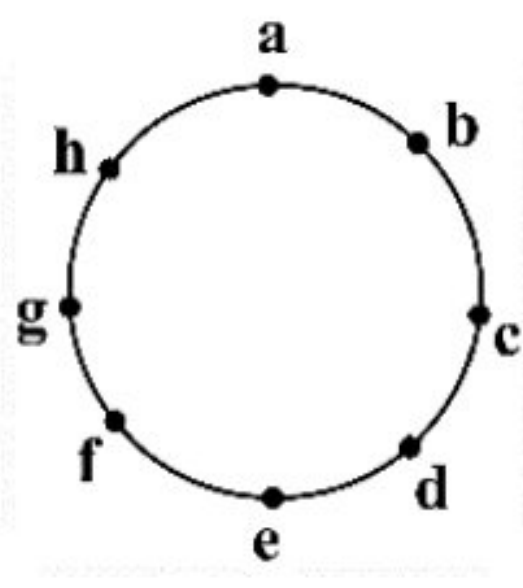
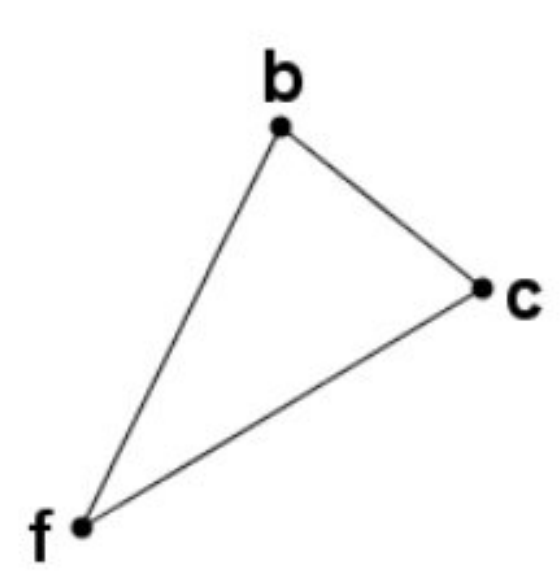
۱	$13 \equiv -4 \Rightarrow 13^2 \equiv (-4)^2 \Rightarrow 13^2 \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv -1} 13^2 \equiv -1 \Rightarrow (13^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \Rightarrow$ $13^{22} \equiv -1 \xrightarrow{16 \equiv -1} 13^{22} \equiv -1 + 17 \Rightarrow 13^{22} \equiv 16 \Rightarrow r = 16$	۱۱۰
۱	$a \equiv b \Rightarrow m a - b \Rightarrow m c(a - b) \Rightarrow m ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc$	۱۱۱
۰/۲۵	نادرست	۱۱۲
۱/۵	$13y \equiv 7 \xrightarrow{13 \equiv 4, 7 \equiv 16} 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4 \Rightarrow y = 9k + 4, x = -13k - 5$	۱۱۳
۱	$1 \dots \equiv 6 \xrightarrow{6 \equiv -1} 1 \dots \equiv -1 \Rightarrow 1 \dots^{13} \equiv (-1)^{13} \Rightarrow 1 \dots^{13} \equiv -1 \Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 \equiv -1 \times 12$ $\Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 \equiv -12 \Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 + 10 \equiv -2$ $\Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \Rightarrow 1 \dots^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \Rightarrow r = 5$	۱۱۴
۱	$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$	۱۱۵

## فصل دوم: گراف و مدل سازی

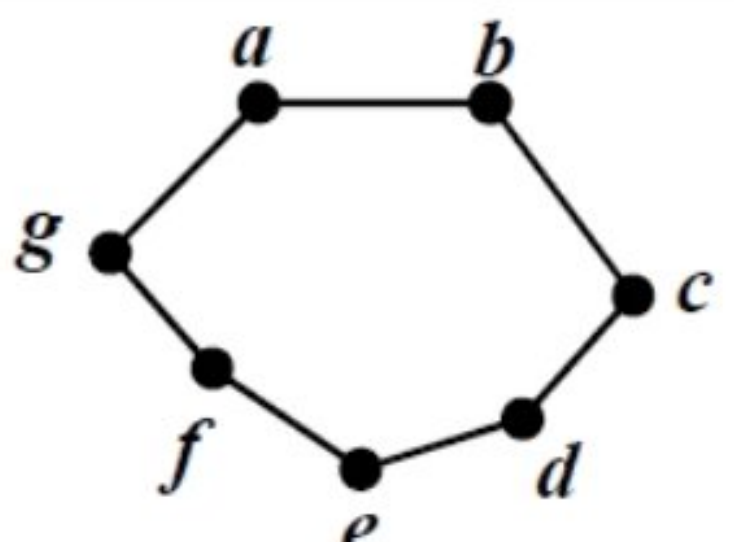
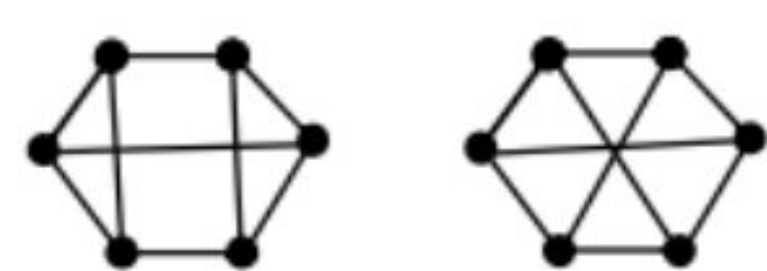
### درس اول: معرفی گراف

۰/۲۵	۲۱	۱۱۶
۲	الف) مرتبه ب) مسیر پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ ت) دور ص) ۳۵ و ۳۸	۱۱۷





۱/۵	<p>الف) <math>\Delta(G) = ۳</math> و <math>\delta(G) = ۰</math></p> <p>ب) <math>b c e d b</math></p> <p>پ) <math>b c d e</math> یا <math>b d e c</math> یا <math>b c e d</math> یا <math>b d c e</math> دو مورد</p> <p>ت) <math>N_G(f) = \{g\}</math></p> <p>ص) (۴۱)</p>	۱۱۸
۲/۲۵	<p>الف: <math>abgc</math></p> <p>ب: <math>bcdgb</math></p> <p>پ: ۵</p> <p>ت: خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است. (هیچ مسیری از <math>f</math> به سایر رئوس وجود ندارد.)</p> <p>ث: <math>N_G[f] = \{f\}</math></p>	۱۱۹
۱/۵	 <p>الف: رسم گراف</p> <p>ب: <math>D = \{a, d, g\}</math></p> <p>پ: <math>\{a, c, e, g\}</math> یک مجموعه احاطه گر مینیمال</p>	۱۲۰
۱	<p>الف: تنها</p> <p>ب: طوقه</p> <p>پ: همبند</p> <p>ت: زوج</p>	۱۲۱
<p>۰.۲۵</p> <p>۰.۱۷۵</p> <p>۰.۱۷۵</p> <p>۰.۱۲۵</p> <p>۰.۱۵</p>	<p>الف: ۳</p> <p>ب: <math>\{a, b, c\}</math></p> <p>پ: <math>abfdea</math></p> <p>ت: ۳</p> <p>ث:</p> 	۱۲۲

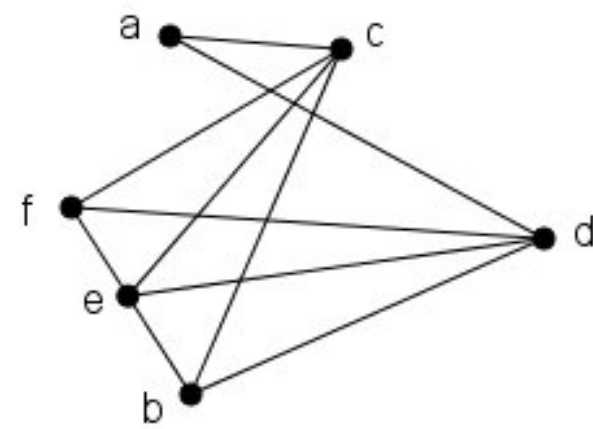


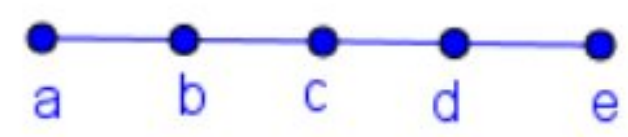


۱	$\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p^2 - p - 72 = 0 \Rightarrow (p-9)(p+8) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} p = 9 & \text{ق ق} \\ p = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$	۱۲۳
۱	<p>(الف) فرد ( درجه یک رأس صفحه ۳۵ )</p> <p>(ب) تهی ( تعریف گراف تهی صفحه ۳۵ )</p> <p>(پ) ۶ (مشابه کار در کلاس صفحه ۴۰)</p> <p>(ت) همبند ( تعریف همبندی صفحه ۳۹ )</p>	۱۲۴
۱	<p>(الف) رسم گراف ( تعریف مسیر و گراف <math>C_n</math> صفحه ۳۸ )</p> <p>مسیر : <math>a b c d e f</math> ( به سایر مسیرهای درست ، نمره داده شود )</p> <p>(ب) ( مشابه مثال صفحه ۳۶ ) <math>N_G(c) = \{b, d\}</math></p> 	۱۲۵
۲	<p>الف : <math>7 - 4 = 3</math></p> <p>ب : <math>ab c d a</math> یا <math>a d b c a</math></p> <p>پ : <math>q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q(\bar{G}) = 15 \Rightarrow q(\bar{G}) = 8</math></p>	۱۲۶
۲/۲۵	<p>الف : <math>abgc</math></p> <p>ب : <math>bcdgb</math></p> <p>پ : ۵</p> <p>ت : خیر ، زیرا دارای رأس ایزوله است هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد.</p> <p>ث : <math>N_G(f) = \{ \}</math></p>	۱۲۷
۱/۲۵	<p><math>q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6</math></p> 	۱۲۸
۲	<p>الف : <math>N_G(c) = \{a, e, d\}</math></p> <p>ب : رأس <math>f</math> و ۵</p> <p>پ : <math>abecda</math></p> <p>ت : خیر</p>	۱۲۹

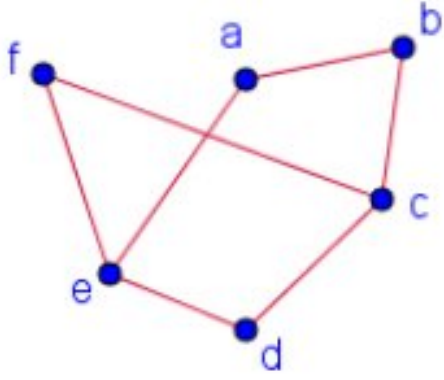
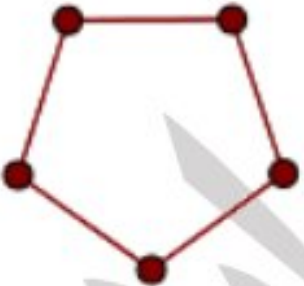

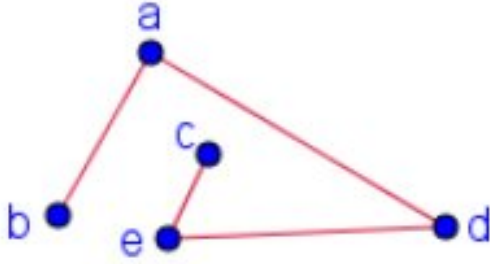


۱	الف : رئوس ب: طوقه پ : مجاور ت : زوج	۱۳۰
۲	الف: ۳ ب : $abdca$ , $abca$ , $bdcb$ پ: ۴	۱۳۱
۱	الف : گرافی که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد $k$ باشد. ب :  پ: بله	۱۳۲
۰/۵	الف : دو برابر ب : $k$	۱۳۳
۱/۲۵	الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ ب : دور به طول ۴ $abeda$ پ : مسیر به طول ۳ $aebc$ ، و مسیر به طول ۴ $adebc$	۱۳۴
۰/۷۵	$deg_G(v) + deg_{\bar{G}}(v) = P - 1 \Rightarrow 9 + 12 = P - 1 \Rightarrow P = 22$	۱۳۵
۱	الف : $3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$ ب : رسم یکی از گراف های زیر کافی است. 	۱۳۶
۱	فرض کنیم $G$ یک گراف و $A$ مجموعه همه رئوس فرد گراف و $B$ مجموعه همه رئوس زوج گراف $G$ باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2q$ , از طرفی $\sum_{v \in B} deg(v) = 2k$ $\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in A} deg(v) + \sum_{v \in B} deg(v)$ زوج اند. لذا $\sum_{v \in A} deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. می دانیم تعدادی زوج عدد فرد ، حاصل زوج را تولید می کنند بنابراین تعداد اعضای $A$ باید زوج باشد.	۱۳۷
۱	الف : مرتبه ب: مسیر پ : $\frac{n(n-1)}{2}$ ت : دور	۱۳۸



۲	<p>الف: <math>\delta = 1</math> و <math>\Delta = 3</math></p> <p>ب: befab</p> <p>پ:</p>  <p>ت: <math>N(e) = \{a, b, f\}</math></p>	۱۳۹
۱	 <p>الف: <math>pr = 5 \times 2 = 10 = 2q \rightarrow q = 5</math></p> <p>ب: رسم گراف امکان پذیر نیست زیرا <math>pr = 7 \times 3 = 21 \neq 2q</math> یا تعداد رئوس با درجه فرد نمی تواند عددی فرد باشد.</p>	۱۴۰
۲/۵	<p>الف: <math>\delta = 0</math> و <math>\Delta = 4</math></p> <p>ب: cabc , caec , cedic</p> <p>پ: ۵</p> <p>ت: <math>N_G[e] = \{e, a, c, d\}</math></p> <p>ث: خیر</p>	۱۴۱
۱	<p><math>\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow p = 5</math></p> 	۱۴۲
۱	<p><math>\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 3 \times 7 = 2q \Rightarrow 21 \neq 2q</math> زوج ۲۱ فرد وجود ندارد. زیرا:</p>	۱۴۳
۱	 <p>abcd , bcde</p>	۱۴۴
۰/۵		۲۸
۱/۵	<p>الف: <math>p = 6</math> , <math>q = 7</math></p> <p>ب: <math>N_G[b] = \{a, d, b, c\}</math></p> <p>ج: <math>8 = \text{تعداد یال های گراف } \bar{G} \Rightarrow 15 = 7 + \text{تعداد یال های گراف } \bar{G} \Rightarrow 8 = \frac{6(6-1)}{2} + 7</math></p>	۱۴۶
۰/۵	<p><math>\frac{n(n-1)}{2}</math></p>	۱۴۷

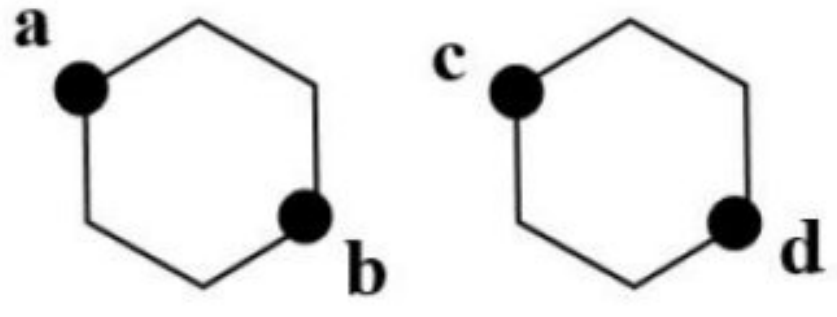



۱/۵	الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ ب: $abca$ یا $bcd b$ ج: درجه ی راس $e$ در گراف مکمل ۳ خواهد بود.	۱۴۸
۰/۲۵	نادرست	۱۴۹
۰/۱۵	$n$ راسی	۱۵۰
۲	الف:  ب: $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ج: $baefcd$	۱۵۱
۱	 	۱۵۲
۰/۲۵	نادرست	۱۵۳
۱/۲۵	الف: $\delta(G) = 1$ ب: $q = ۶$ پ: $N_G[b] = \{a, b, c, d\}$ ت: $x = c$	۱۵۴
۱	الف: گرافی از مرتبه ی $n$ که درجه ی تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد $k$ ( $۰ \leq k \leq n$ ) باشد. ب: وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم: $\sum_{i=1}^n \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۵ \times ۳ = ۲q$ که تناقض است.	۱۵۵
۱	الف: $acdbea$ ب:	۱۵۶
		

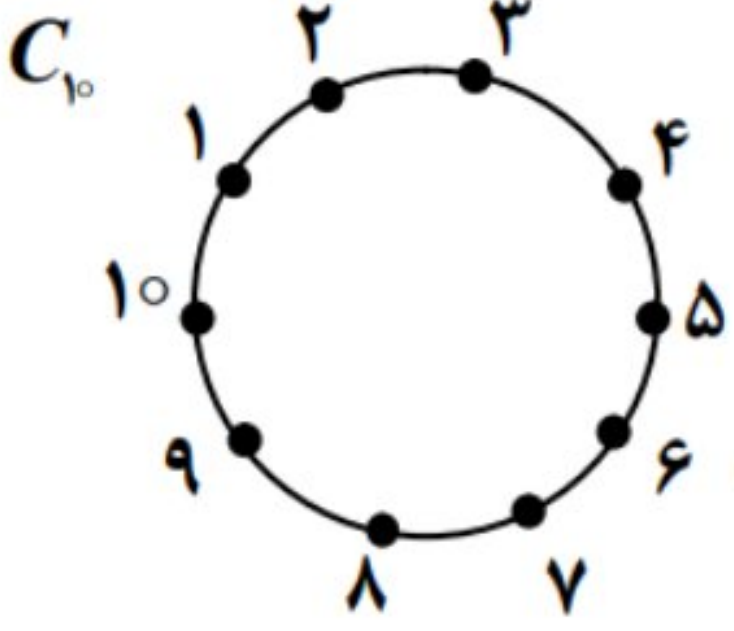


۰/۱۵	الف : نادرست ب : درست	۱۵۷
۱	فرض کنیم $G$ یک گراف و $A$ مجموعه همه رئوس فرد گراف و $B$ مجموعه همه رئوس زوج گراف $G$ باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q, \quad \sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ از طرفی $\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج اند. لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. می دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می کنند بنابراین تعداد اعضای $A$ باید زوج باشد.	۱۵۸
۱/۱۵	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : $\deg(a) = 5$ ت : خیر زیرا برای مثال از $f$ به $a$ مسیری وجود ندارد. ث :	۱۵۹
۱	الف : $N_G[d] = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$	۱۶۰
۱	$q = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p = 9 \Rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$	۱۶۱
<b>درس دوم : مدل سازی با گراف</b>		
۰/۲۵	مینیمال	۱۶۲
۱	روش اول : می دانیم $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ پس داریم $\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ بنابراین $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$ روش دیگر : این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ . اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک راس دارد که تمام رئوس را احاطه می کند یعنی راس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین راسی وجود ندارد. و لذا $\gamma(G) > 1$ بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$ (ص ۳۹)	۱۶۳



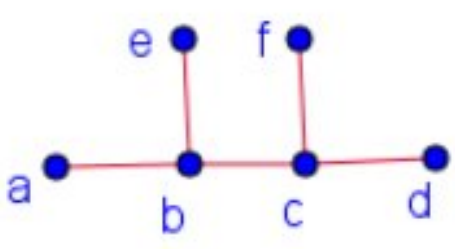
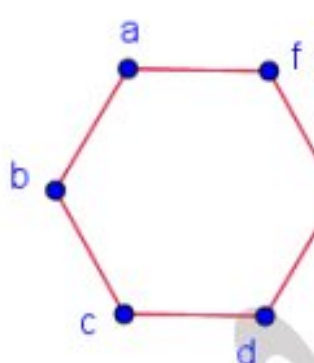
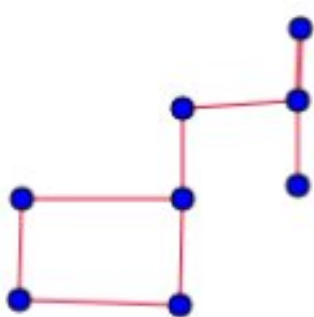


۱	 <p>(به شکل های دیگر نیز نمره داده شود ) مانند :</p> 	۱۶۴	رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن (ص ۵۳)
۱/۵		۱۶۵	الف : رسم گراف ب : $D = \{a, d, g\}$ پ : $\{a, c, e, g\}$ : یک مجموعه احاطه گر مینیمال
۱/۲۵		۱۶۶	الف : $\{g, c\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$ ب : $\{h, d, b\}$
۱/۵		۱۶۷	با توجه به شکل $\gamma(G) = 3$ $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2 \leq \gamma(G)$
۱/۲۵		۱۶۸	الف) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می نامیم. (تعریف صفحه ۴۶) ب) (مشابه مثال صفحه ۴۵) (به سایر مجموعه های احاطه گر صحیح، نمره داده شود.) $D = \{h, b, i, a\}$
۱/۲۵		۱۶۹	(فعالیت صفحه ۵۰) برای احاطه کردن رئوس $a$ و $b$ و $c$ و $d$ و $g$ حداقل دو تا از آن ها باید در مجموعه احاطه گر باشند، زیرا $\left\lfloor \frac{5}{3+1} \right\rfloor = 2$ . برای احاطه کردن رئوس $e$ و $f$ و $h$ حداقل یکی از آن ها باید انتخاب شوند، زیرا $\left\lfloor \frac{3}{3+1} \right\rfloor = 1$ . بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه گری از گراف باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$ . از طرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$
۱	 <p><math>D = \{2, 5, 8\}</math></p>	۱۷۰	(تعریف گراف $P_n$ صفحه ۳۸ و مشابه مثال صفحه ۵۱) رسم گراف





۱۷۱	(مشابه سؤال ۱۱ صفحه ۵۴) ( در صورت ارائه مجموعه‌های مشابه با این ویژگی‌ها نمره داده شود ) الف) $D = \{h, c, e\}$ ب) $D = \{g, c, i, e\}$	۱/۵
۱۷۲	الف : نادرست ب : نادرست ج : درست د : درست	۱
۱۷۳	طبق قضیه داریم $\left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$	۱/۵
۱۷۴	الف : $D = \{1, 4, 7, 10\}$ ب : $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	۱/۵ 
۱۷۵	طبق قضیه داریم : $\left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor = 2 \leq \gamma(G)$ . از طرفی مجموعه $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$	۱/۵
۱۷۶	$\{a, e, c, h\}$ مجموعه های مشابه دیگری نیز می توان نوشته که ویژگی مساله را داشته باشد.	۱
۱۷۷	مجموعه احاطه گر مینیمم مجموعه احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه گر مینیمال مجموعه احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه احاطه گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد.	۱
۱۷۸	$\{a, c, i, d\}$ مجموعه های مشابه دیگری نیز می توان نوشته که ویژگی مساله را داشته باشد.	۱
۱۷۹	طبق قضیه داریم : $\left\lfloor \frac{10}{4+1} \right\rfloor = 2 \leq \gamma(G)$ . از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$	۱/۵

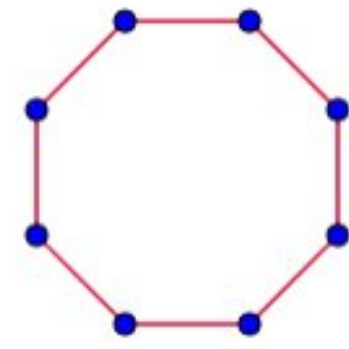
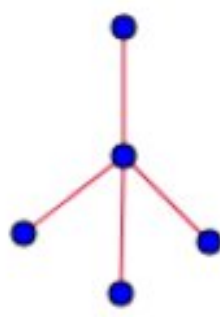
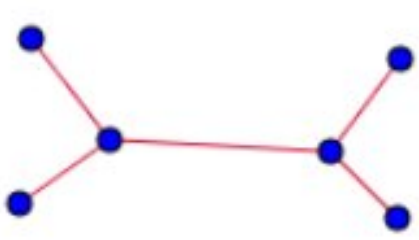
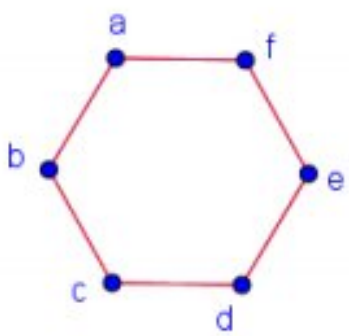
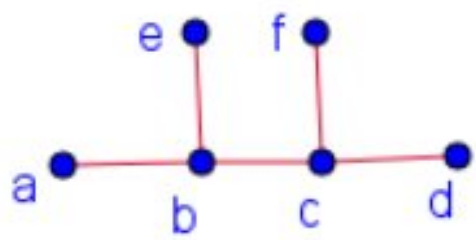
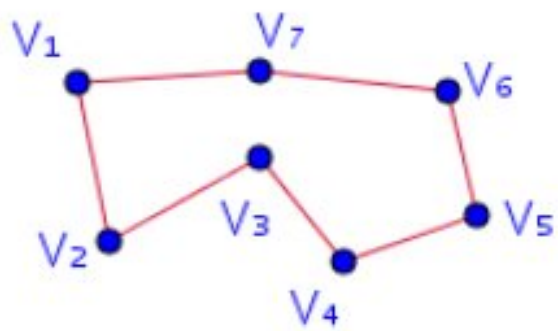


۱۸۰	الف: 	ب: 	۱/۵
۱۸۱	الف: $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$ ب: $\left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor = 2$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ ، از سویی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ . نتیجه می شود $\gamma(G) = 2$	۲	
۱۸۲	با توجه $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ ، لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است . از سویی دیگر $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ . نتیجه می شود $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری)	۱/۵	
۱۸۳	با توجه $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ ، لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است . از سویی دیگر $\{a, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ . نتیجه می شود $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری)	۱/۲۵	
۱۸۴	یک مجموعه احاطه گر که با حذف هریک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد ، احاطه گر مینیمال است.	۰/۷۵	
۱۸۵	الف: گراف رو به رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه گر یکتا $\{c, b\}$ است. ب: گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{e, b\}, \{f, c\}, \{a, d\}$	 	۱
۱۸۶	با توجه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3$ ، بنابراین $\gamma(G) \geq 3$ . از سویی دیگر $\{h, d, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$ . نتیجه می شود $\gamma(G) = 3$ (عدد احاطه گری)	۱/۲۵	
۱۸۷	الف: برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم $C_{10}$ یا $P_{10}$ کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 4$ ب: در گرافی مشابه زیر $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.		۱/۲۵



۱۸۸	الف : مجموعه احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$ ب : احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$	۱/۲۵
۱۸۹	یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف راس $a$ از آن ، یک مجموعه احاطه گر مینیمال به دست آید.	۱
۱۹۰	الف : ب: $\{a, d, g\}$ ج : $\{a, d, e, h\}$	۱/۵ 
۱۹۱	الف : ب:	۱ 
۱۹۲	الف : با توجه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$ ، بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ ، از سویی دیگر $\{a, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. مجموعه $\{a, g\}$ همان ۲- مجموعه است. ب: با توجه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$ ، بنابراین $\gamma(G) \geq 3$ ، از سویی دیگر $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه احاطه گر است. از طرفی با کمتر از ۴ راس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد ، بنابراین $\gamma(G) = 4$ و مجموعه $\{b, f, j, h\}$ همان ۴- مجموعه است.	۱/۵
۱۹۳	الف : $\{c, f, h, j\}$ ب : $\{a, b, f, h\}$ پ : $\{c, f, h\}$	۱/۵
۱۹۴	الف : زیر مجموعه $D$ از مجموع رئوس گراف $G$ را مجموعه ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر راس از گراف یا در $D$ باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در $D$ مجاور باشد. ب: تعداد اعضای مجموعه احاطه گر مینیمم گراف $G$ را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم.	۱



۱	الف : $\{f, d\}$ ب : $\{e, f, g, h\}$	۱۹۵
۱/۵	$\Delta(G) = 4$ $\text{حداکثر تعداد یالها} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\text{حداقل تعداد یالها} = n - 1 = 5 - 1 = 4$	۱۹۶
۱/۵	الف :  ب :  ج : 	۱۹۷
۰/۵	الف : درست ب : درست	۱۹۸
۰/۵	۲	۱۹۹
۱	الف :  ب : 	۲۰۰
۱/۵	الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه ی احاطه گر مینیمال باقی می ماند . بنابراین عضوی مانند $a_1$ را در نظر می گیریم . اگر با حذف آن مجموعه ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم ، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	۲۰۱
۱/۵	الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب : $\gamma(G) = 3$ ج : $\{v_2, v_4, v_6\}$ و $\{v_1, v_3, v_5\}$ 	۲۰۲



۱	الف : ۳ راس ب: $p - 1$	۲۰۳
۱	الف : $\{b, e, h, k\}$ ب: $\{a, c, e, g, i, k\}$	۲۰۴

## فصل سوم : ترکیبیات (شمارش)

### درس اول : مباحثی در ترکیبیات

۰/۲۵	درست	۲۰۵									
۱	$4! \times 2^4 = 384$ (ص ۷۱)	۲۰۶									
۱/۷۵	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$ , $x_3 = 3$ , $x_4 \geq 3$ , $x_5 \geq 5$ $x_3=3$ , $x_4=y_4+3$ , $x_5=y_5+5$ $\rightarrow x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16$ $x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5$ $x_i \geq 0$ , $y_5 \geq 0 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56$ (ص ۷۱)	۲۰۷									
۱/۲۵	فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱ و ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین $3 \times 3$ زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقا یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲) <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۲۰۸
۱	۲	۳									
۳	۱	۲									
۲	۳	۱									
۱	$\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$	۲۰۹									
۱	چهار دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را به چند طریق می توان در یک ردیف کنارهم قرار داد به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند.	۲۱۰									
۱/۵	$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{9}{2} = 36$ $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow 36 + 10 = 46$	۲۱۱									



۱/۲۵	متعامد هستند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری نداریم.	۲۱۲																											
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳										
۱	۲	۳																											
۲	۳	۱																											
۳	۱	۲																											
۳	۱	۲																											
۲	۳	۱																											
۱	۲	۳																											
۱	الف : $4! \times 4!$ ب : $4! \times 3!$	۲۱۳																											
۱	$\frac{7}{2! \times 2! \times 3!}$	۲۱۴																											
۱/۵	$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$	۲۱۵																											
۱/۵	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>A =</math> <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <math>B =</math> <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <math>BA =</math> <table border="1"> <tr><td>۳۱</td><td>۱۲</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۲۲</td><td>۳۳</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۱۳</td><td>۲۱</td><td>۳۲</td></tr> </table> </div> </div> <p>متعامد هستند چون هیچ عدد تکراری در مربع ترکیبی وجود ندارد.</p>	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳۱	۱۲	۲۳	۲۲	۳۳	۱۱	۱۳	۲۱	۳۲	۲۱۶
۱	۲	۳																											
۲	۳	۱																											
۳	۱	۲																											
۳	۱	۲																											
۲	۳	۱																											
۱	۲	۳																											
۳۱	۱۲	۲۳																											
۲۲	۳۳	۱۱																											
۱۳	۲۱	۳۲																											
۱	الف) $6! \times 6!$ ب) $6! \times 5!$ (مشابه مثال صفحه ۵۷)	۲۱۷																											
۱	$\frac{9!}{3! \times 2!}$ (مشابه مثال صفحه ۵۸)	۲۱۸																											
۱/۵	<p>(تمرین ۹ صفحه ۷۱)</p> $x_3 = 4, x_5 \geq 3 \Rightarrow x_5 = y_5 + 3$ $x_1 + x_2 + 4 + x_4 + 3 + y_5 + x_6 = 12$ $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow z = \binom{9}{4}$	۲۱۹																											



۲	<div><div><table><tr><td>۳۴</td><td>۴۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>۲۲</td><td>۱۳</td><td>۴۱</td><td>۳۴</td></tr><tr><td>۱۳</td><td>۲۲</td><td>۳۴</td><td>۴۱</td></tr><tr><td>۴۱</td><td>۳۴</td><td>۲۲</td><td>۱۳</td></tr></table></div><div><math>B =</math><table><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۴</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۴</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table></div></div> <p>متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۳۴	۴۱	۱۳	۲۲	۲۲	۱۳	۴۱	۳۴	۱۳	۲۲	۳۴	۴۱	۴۱	۳۴	۲۲	۱۳	۴	۱	۳	۲	۲	۳	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۱	۴	۲	۳	الف) (مشابه کار در کلاس صفحه ۶۴) ب) (مفهوم متعامد بودن صفحه ۶۴) ۲۲۰
۳۴	۴۱	۱۳	۲۲																															
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴																															
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱																															
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳																															
۴	۱	۳	۲																															
۲	۳	۱	۴																															
۳	۲	۴	۱																															
۱	۴	۲	۳																															
۰/۵		۲۲۱																																
۱		۲۲۲																																
۱/۷۵	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ $x_2 \geq 4 \Rightarrow y_2 = x_2 - 4, y_2 \geq 0$ $x_6 > 2 \Rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$ $x_1 + x_2 + y_2 + 4 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$ $x_1 + x_2 + y_2 + x_4 + x_5 + y_6 = 3 \Rightarrow z = \binom{8}{5}$	۲۲۳																																
۱/۲۵	<p>متعامدند ، زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد.</p> <div><math>B =</math><table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr></table><math>\Rightarrow</math><table><tr><td>۱۲</td><td>۲۳</td><td>۳۱</td></tr><tr><td>۳۳</td><td>۱۱</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>۲۱</td><td>۳۲</td><td>۱۳</td></tr></table></div>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱۲	۲۳	۳۱	۳۳	۱۱	۲۲	۲۱	۳۲	۱۳	۲۲۴														
۱	۲	۳																																
۳	۱	۲																																
۲	۳	۱																																
۱۲	۲۳	۳۱																																
۳۳	۱۱	۲۲																																
۲۱	۳۲	۱۳																																
۱	<p>یا جواب می تواند به این فرم نیز نوشته شود.</p> <div><math>\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}</math><div><math>\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}</math></div></div>	۲۲۵																																
۱	الف : $6! \times 2!$ ب : $2! \times 5!$	۲۲۶																																
۱/۵	$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0, \quad y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0$ $y_1 + 3 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 = 15 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8 \Rightarrow z = \binom{12}{4}$	۲۲۷																																



۱/۲۵	الف : دو نوع مربع لاتین مرتبه ۲ داریم . ب : متعامد نیستند زیرا در مربع زیر عدد دو رقمی تکراری داریم.	۲۲۸
	$\begin{array}{ c c } \hline ۱۲ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c c } \hline ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c c } \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$	
۱	الف : $۶! \times ۲!$ ب : $۲! \times ۷!$	۲۲۹
۲	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۲$ , $x_1 \geq ۱$ , $x_4 > ۳$ , $x_6 = ۱$ $y_1 = x_1 - ۱$ , $y_1 \geq ۰$ , $y_4 = x_4 - ۴$ , $y_4 \geq ۰$ $y_1 + ۱ + x_2 + x_3 + y_4 + ۴ + x_5 + ۱ = ۱۲ \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = ۶ \Rightarrow \text{ج} = \binom{۱۰}{۴}$	۲۳۰
۱/۵	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array} \Rightarrow B = \begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ c c c } \hline ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ \hline ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ \hline ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \\ \hline \end{array}$ <p>متعامد نیستند . زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۲۳۱
۱	الف : $۳! \times ۳!$ ب : $۲! \times ۴!$	۲۳۲
۱/۵	$y_2 = x_2 - ۳$ , $y_2 \geq ۰$ , $x_5 = ۲$ $x_1 + y_2 + ۳ + x_3 + x_4 + ۲ + x_6 = ۱۷ \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = ۱۲ \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{۱۶}{۴}$	۲۳۳
۲	<p>الف:</p> $\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} B =$ <p>ب :</p> $\begin{array}{ c c c } \hline ۲۱ & ۱۳ & ۳۲ \\ \hline ۳۲ & ۲۱ & ۱۳ \\ \hline ۱۳ & ۳۲ & ۲۱ \\ \hline \end{array}$ <p>متعامد نیستند زیرا در مربع آخر ، عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۲۳۴
۰/۷۵	$\frac{۸!}{۳! \times ۴!}$ یا $\binom{۸}{۴} \binom{۴}{۳} \binom{۱}{۱}$	۲۳۵



۱/۲۵	$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1$ , $y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 4 + y_3 \Rightarrow$ $1 + y_1 + x_2 + 4 + y_2 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_4 + x_5 = 9 \Rightarrow$ جواب $= \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$	۲۳۶																
۰/۵	<table border="1"><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۲۳۷
۱	۲	۳	۴															
۴	۱	۲	۳															
۳	۴	۱	۲															
۲	۳	۴	۱															
۱	<p>در مربع لاتین مقابل اعداد تکراری نداریم . پس دو مربع لاتین ، متعامدند.</p> <table border="1"><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr></table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۲۳۸							
۱۱	۲۲	۳۳																
۳۲	۱۳	۲۱																
۲۳	۳۱	۱۲																
۱	$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۲۳۹																
۱/۵	$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 = y_2 + 3$ , $x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + y_2 + 3 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 17 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 10$ تعداد جواب صحیح و مثبت $= \binom{n-1}{k-1} = \binom{10-1}{5-2} = \binom{9}{3}$	۲۴۰																
۱	<table border="1"><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۲۴۱
۱	۲	۳	۴															
۴	۱	۲	۳															
۳	۴	۱	۲															
۲	۳	۴	۱															
۰/۷۵	$\frac{7!}{2! \times 3!} = 420$	۲۴۲																



۱/۲۵	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11, x_2 \geq 2, x_5 \geq 4$ $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$	۲۴۳																		
۱	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$ مربع لاتین به صورت مقابل داریم. <table><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr><tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۲۴۴		
۳	۲	۱	۴																	
۱	۴	۳	۲																	
۴	۱	۲	۳																	
۲	۳	۴	۱																	
۱	الف: <table><tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr><tr><td>۱۱</td><td>۳۳</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۱۲</td><td>۳۱</td></tr></table> ب: <table><tr><td>۱۳</td><td>۲۱</td><td>۳۲</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۱</td><td>۳۲</td><td>۱۳</td></tr></table> متعامدند زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. متعامد نیستند زیرا عدد دو رقمی تکراری داریم.	۳۲	۲۱	۱۳	۱۱	۳۳	۲۲	۲۳	۱۲	۳۱	۱۳	۲۱	۳۲	۳۲	۱۳	۲۱	۲۱	۳۲	۱۳	۲۴۵
۳۲	۲۱	۱۳																		
۱۱	۳۳	۲۲																		
۲۳	۱۲	۳۱																		
۱۳	۲۱	۳۲																		
۳۲	۱۳	۲۱																		
۲۱	۳۲	۱۳																		
۱	الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۲۴۶																		
۱	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی. یعنی: $\frac{8!}{4!} = 1680$ $(8)_4 = \frac{8!}{4!}$	۲۴۷																		
۱/۲۵	الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۲۴۸																		
۱	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ $y_1 + 3 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ تعداد جواب $= \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$	۲۴۹																		
۱	$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 2!} = 840$	۲۵۰																		



۰/۷۵	<table><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr></table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۲۵۱	در مربع لاتین مقابل اعداد تکراری نداریم . پس دو مربع لاتین ، متعامدند.																
۱۱	۲۲	۳۳																										
۳۲	۱۳	۲۱																										
۲۳	۳۱	۱۲																										
۱/۵	الف : $۴! \times ۶!$ ب : $۵! \times ۴!$ ج : $۳! \times ۷!$	۲۵۲																										
۱	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۲ \Rightarrow y_1 + ۳ + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + ۴ + x_6 = ۱۲ \Rightarrow$ $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = ۵ \Rightarrow \binom{۵+۶-۱}{۶-۱} = \binom{۱۰}{۵} = ۲۵۲$	۲۵۳																										
۱	<table><tr><td></td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td><math>C_1</math></td><td><math>T_1</math></td><td><math>T_2</math></td><td><math>T_3</math></td><td><math>T_4</math></td></tr><tr><td><math>C_2</math></td><td><math>T_4</math></td><td><math>T_1</math></td><td><math>T_2</math></td><td><math>T_3</math></td></tr><tr><td><math>C_3</math></td><td><math>T_3</math></td><td><math>T_4</math></td><td><math>T_1</math></td><td><math>T_2</math></td></tr><tr><td><math>C_4</math></td><td><math>T_2</math></td><td><math>T_3</math></td><td><math>T_4</math></td><td><math>T_1</math></td></tr></table>		۱	۲	۳	۴	$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	۲۵۴	
	۱	۲	۳	۴																								
$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$																								
$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$																								
$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$																								
$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$																								
۱	$۴! \times ۲^۴ = ۲۴ \times ۱۶ = ۳۸۴$	۲۵۵																										
۱/۵	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱۲ \Rightarrow y_1 + ۳ + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + ۴ = ۱۲$ $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{۵+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۹}{۴} = ۱۲۶$	۲۵۶																										
۱	$\frac{۹!}{۲! \times ۳! \times ۴!} = ۱۲۶۰$	۲۵۷																										
۰/۲۵		۲۵۸	درست																									
۱/۵	<table><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table> <table><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr></table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲۵۹								
۲	۳	۱																										
۱	۲	۳																										
۳	۱	۲																										
۱	۳	۲																										
۳	۲	۱																										
۲	۱	۳																										
۲	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۸ \quad x_i \geq ۱, i = ۱, ۲, ۳, ۴ \Rightarrow \binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$	۲۶۰																										



۰/۵	۴	۲۶۱																																																
۱	<div><table><tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr><tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table><div><div>۱ → ۳</div><div>۲ → ۲</div><div>۳ → ۴</div><div>۴ → ۱</div></div><table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۳</td></tr></table></div> <div>در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد ، بنابراین مربع جدید ، مربع لاتین است.</div>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۲۶۲																
۴	۲	۱	۳																																															
۳	۱	۲	۴																																															
۱	۴	۳	۲																																															
۲	۳	۴	۱																																															
۱	۲	۳	۴																																															
۴	۳	۲	۱																																															
۳	۱	۴	۲																																															
۲	۴	۱	۳																																															
۱	الف : ۵! × ۶!      ب : ۵! × ۷!      ج : ۱۰! × ۲!	۲۶۳																																																
۱	۴! × ۲ <sup>۴</sup> = ۲۴ × ۱۶ = ۳۸۴	۲۶۴																																																
۱	<div><math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10 \Rightarrow</math> <math>x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210</math></div>	۲۶۵																																																
۰/۵	۱۵	۲۶۶																																																
۱/۵	<div><table><tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr><tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr></table><table><tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr><tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table><div>→</div><table><tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr><tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr></table></div>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۲۶۷
	ش	ی	د																																															
A	۱	۲	۳																																															
B	۳	۱	۲																																															
C	۲	۳	۱																																															
	ش	ی	د																																															
A	۲	۱	۳																																															
B	۱	۳	۲																																															
C	۳	۲	۱																																															
	ش	ی	د																																															
A	۱۲	۲۱	۳۳																																															
B	۳۱	۱۳	۲۲																																															
C	۲۳	۳۲	۱۱																																															
۱	$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۲۶۸																																																
۱	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۲۶۹																																																



۱/۵	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> <div style="margin: 0 10px;">→</div> <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table> </div>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۲۷۰
۱	۳	۲																											
۳	۲	۱																											
۲	۱	۳																											
۲	۱	۳																											
۳	۲	۱																											
۱	۳	۲																											
۱۲	۳۱	۲۳																											
۳۳	۲۲	۱۱																											
۲۱	۱۳	۳۲																											
<b>درس دوم : روشهایی برای شمارش</b>																													
۱/۵	<p style="text-align: right;">(ص ۸۳)</p> $ \overline{A \cup B}  =  S  -  A \cup B  =  S  -  A  -  B  +  A \cap B $ $ S  = ۶۳۰, \quad  A  = ۲۱۰, \quad  B  = ۱۲۶, \quad  A \cap B  = ۴۲ \Rightarrow  \overline{A \cup B}  = ۳۳۶$	۲۷۱																											
۱/۲۵	<p style="text-align: right;">(ص ۸۴)</p> <p>ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می گیریم ، طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است ، با توجه به قضیه فیثاغورس داریم :</p> $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < ۲^2 + ۲^2 \Rightarrow AB^2 < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$	۲۷۲																											
۱/۲۵	<p>اگر فر کنیم <math>A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}</math> و <math>B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, a_7\}</math> برای تعریف <math>f</math> روی هر عضو <math>A</math> ، ۷ انتخاب داریم ، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع های یک به یک برابر است با <math>۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = \frac{۷!}{۲!}</math> ( مشابه مثال صفحه ۷۸ )</p>	۲۷۳																											
۱	<p>۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می گیریم . طبق اصل لانه کبوتری <math>(۴ &lt; ۵)</math> حداقل یک لانه ( مثلث ) وجود دارد که دو نقطه ( کبوتر ) در آن قرار می گیرد.</p> <p style="text-align: right;">( مشابه مثال صفحه ۸۲ )</p>	۲۷۴																											
۰/۷۵	<p>تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۵ عوی به یک مجموعه ۸ عضوی <math>\frac{۸!}{(۸-۵)!} = ۶۷۲۰</math></p>	۲۷۵																											
۱/۲۵	<p>۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می گیریم . طبق اصل لانه کبوتری <math>(۴ &lt; ۵)</math> حداقل یک لانه ( مثلث ) وجود دارد که دو نقطه ( کبوتر ) در آن قرار می گیرد.</p> <p style="text-align: right;">( مشابه مثال صفحه ۸۲ )</p>	۲۷۶																											
۱/۲۵	<p style="text-align: right;">( مشابه مثال صفحه ۷۸ )</p> <p>این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی می توان نوشت.</p> $۳^۵ - (۳ \times ۲^۵ - ۳) = ۲۴۳ - ۹۳ = ۱۵۰$	۲۷۷																											



۱/۲۵	<p>( سؤال ۹ صفحه ۸۳ )</p> <p>تعداد کبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته <math>\times</math> تعداد ماه‌های سال <math>n = 7 \times 12 = 84</math> طبق تعمیم اصل لانه کبوتری :</p> $kn + 1 = 505 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$ <p>در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند . یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است .</p>	۲۷۸
۱/۵	$A = \{1 \leq n \leq 300   n = 4k, k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow n(A) = \left[ \frac{300}{4} \right] = 75$ $B = \{1 \leq n \leq 300   n = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 300   n = 20k, k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{300}{20} \right] = 15$ $ A \cap B'  =  A  -  A \cap B  = 75 - 15 = 60$	۲۷۹
۱	<p>برای اینکه مجموع دو عدد زوج باشد ، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو عدد فرد ، بنابر این تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است . طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.</p>	۲۸۰
۱/۵	$A = \{1 \leq n \leq 200   n = 4k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[ \frac{200}{4} \right] = 50$ $B = \{1 \leq n \leq 200   n = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 200   n = 28k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{200}{28} \right] = 7$ $ A \cap B'  =  A  -  A \cap B  = 50 - 7 = 43$	۲۸۱
۰/۷۵	$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, kn + 1 = 19 \times 7 + 1 = 134$	۲۸۲
۱/۷۵	$ F  = 15,  V  = 11,  B  = 9,  F \cap V  = 5,  B \cap V  = 6,  F \cap B  = 3$ $ F \cap B \cap V  = 3$ <p>فقط فوتبال بازی کنند. <math>=  F  -  F \cap V  -  F \cap B  +  F \cap B \cap V  = 15 - 5 - 3 + 3 = 10</math></p> <p>فقط والیبال بازی کنند. <math>=  V  -  F \cap V  -  V \cap B  +  F \cap B \cap V  = 11 - 5 - 6 + 3 = 3</math></p> <p>فقط بسکتبال بازی کنند. <math>=  B  -  F \cap B  -  V \cap B  +  F \cap B \cap V  = 9 - 3 - 6 + 3 = 3</math></p> $\Rightarrow \text{ج} = 10 + 3 + 3 = 16$	۲۸۳

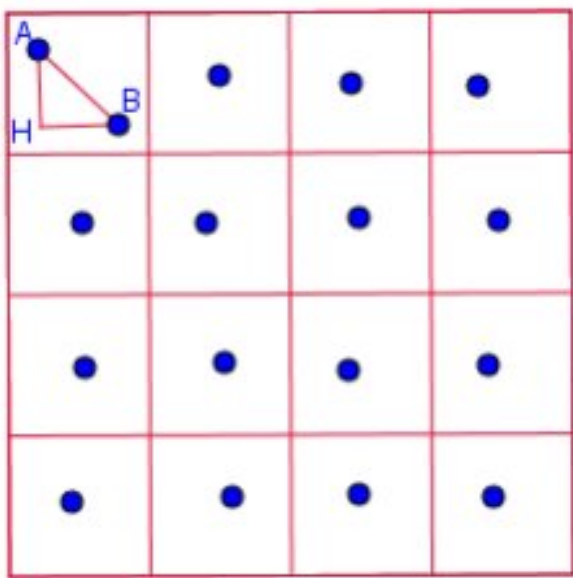
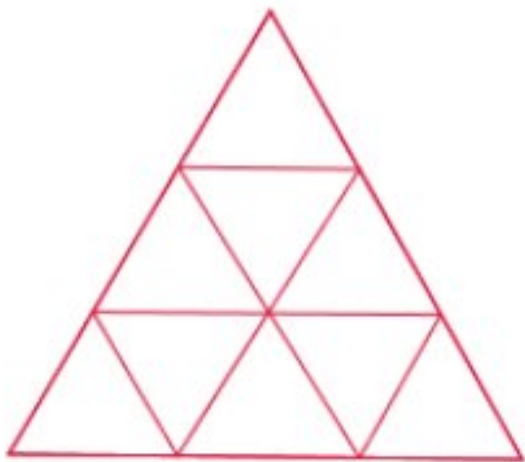


۱	الف : $3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36$ ب : $\frac{8!}{4!} = 1680$	۲۸۴
۰/۷۵	$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4$ . $kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53$ , $n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$	۲۸۵
۱/۵	$A = \{n \in S   n = 5k, k \in Z\} \Rightarrow n(A) = \left\lceil \frac{400}{5} \right\rceil = 80$ $B = \{n \in S   n = 7k, k \in Z\} \Rightarrow n(B) = \left\lceil \frac{400}{7} \right\rceil = 57$ $A \cap B = \{n \in S   n = 35k, k \in Z\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lceil \frac{400}{35} \right\rceil = 11$ $ \overline{A \cup B}  =  S  -  A \cup B  = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$	۲۸۶
۱	$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$ , $n = 32 \times 31 = 992$ , تعداد لانه تعداد کیوتر $= 2 \times 992 + 1 = 1985$	۲۸۷
۱	$ \overline{F \cup V}  =  S  -  F \cup V  = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$	۲۸۸
۱	$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ , $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ به ۶ طریق $f(a_1)$ را تعریف کنیم $f(a_1) = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_6 \Rightarrow$ به ۵ طریق $f(a_2)$ را تعریف کنیم $f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow$ یک به یک به ۴ طریق $f(a_3)$ را تعریف کنیم $f(a_3) \neq f(a_2)$ , $f(a_3) \neq f(a_1) \Rightarrow$ یک به یک بنابراین طبق اصل ضرب $4 \times 5 \times 6 = 120$ تابع یک به یک داریم .	۲۸۹
۱	حل مساله معادل با یافتن تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است. که برابر با $8^4$ است.	۲۹۰
۱	فصل تولد = لانه = ۴ , و افراد خانواده = کیوتر = ۵ , طبق اصل لانه کیوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کیوتر ( دو نفر از اعای خانواده ) در آن قرار گیرند. ( در یک فصل به دنیا آمده اند.)	۲۹۱
۱/۷۵	$ \overline{A_1} \cap \overline{A_2}  =  \overline{A_1 \cup A_2}  =  S  -  A_1  -  A_2  +  A_1 \cap A_2  =$ $= 200 - \left\lceil \frac{200}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{200}{7} \right\rceil + \left\lceil \frac{200}{2 \times 7} \right\rceil = 200 - 100 - 28 + 14 = 86$	۲۹۲



۱	<p>الف: <math>f: A \rightarrow B ( A  = m \geq 3,  B  = 3) \xrightarrow{\text{تعداد توابع پوشا}} 3^m - (3 \times 2^m - 3) = 3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36</math></p> <p>ب: <math>f: A \rightarrow B ( A  = m,  B  = k) \xrightarrow{\text{تعداد توابع پوشا}} (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360</math></p>	۲۹۳																																																
۰/۷۵	$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, n = \text{تعداد لانه ها} = 7$ $N = nk + 1 = 7 \times 19 + 1 = 134$	۲۹۴																																																
۱	<p><math>A = \{n \in N   1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow  A  = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16</math></p> <p><math>A = \{n \in N   1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow  B  = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10</math></p> <p><math>A \cap B = \{n \in N   1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3 \Rightarrow  A \cup B  = 16 + 10 - 3 = 23</math></p>	۲۹۵																																																
۱	در ان مسئله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73$ باشد.	۲۹۶																																																
۱	<p>برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع <math>A</math> مربوط به ماشین ها و مربع <math>B</math> مشخص کننده الیاف است.</p> <div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr></table><p><math>A</math></p></div> <div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr></table><p><math>B</math></p></div> <p>→</p> <div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr></table></div>		$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	۱	۳	۲	روز دوم	۳	۲	۱	روز سوم	۲	۱	۳		$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	۲	۱	۳	روز دوم	۳	۲	۱	روز سوم	۱	۳	۲		$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	۱۲	۳۱	۲۳	روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱	روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲	۲۹۷
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																															
روز اول	۱	۳	۲																																															
روز دوم	۳	۲	۱																																															
روز سوم	۲	۱	۳																																															
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																															
روز اول	۲	۱	۳																																															
روز دوم	۳	۲	۱																																															
روز سوم	۱	۳	۲																																															
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																															
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳																																															
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱																																															
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲																																															
۰/۲۵	درست	۲۹۸																																																
۱/۷۵	<p><math>1 \leq j \leq 3, A_j = \{f: A \rightarrow B   f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}</math></p> <p><math>A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}</math></p> <p><math> S  = 3^4,  A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4,  A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1^4</math></p> <p><math> A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0^4 = 0</math></p> <p><math> A_1 \cup A_2 \cup A_3  =  A_1  +  A_2  +  A_3  -  A_1 \cap A_2  -  A_1 \cap A_3  -  A_2 \cap A_3  +  A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45</math></p> <p><math> \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - 45 = 36</math></p>	۲۹۹																																																



۱	<p>تعداد کبوترها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:</p> <p>..... و ..... و ..... و ..... و .....  ۴۲ و ۴۳      ۸۲ و ۸۳      ۸۴ و ۸۵</p> <p>چنانچه قرار باشد ، کبوترها ، لانه ها را اشغال کنند . آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعه شان ۸۵ است.</p>	۳۰۰
۱/۵	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{350}{4} \right] + \left[ \frac{350}{6} \right] - \left[ \frac{350}{12} \right] = 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۳۰۱
۱/۵	<p>تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر</p> <p>تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه</p>  <p>طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه A , B در یک لانه جای می گیرند. پس :</p> $\begin{aligned} AH &< 2 \\ BH &< 2 \end{aligned} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$	۳۰۲
۱/۵	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل ، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه اعضای B باشند.</p> $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۳۰۳
۱/۵	<p>مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۴ را A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می نامیم . بنابراین:</p> $n(A) = \left[ \frac{400}{4} \right] = 100, \quad n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57, \quad n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p>الف :</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p>ب :</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B - A) = 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۳۰۴
۱/۵	<p>مطابق شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (با ضلع هایی به طول ۱ واحد ) تقسیم می کنیم. حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است.</p> 	۳۰۵



۱/۵	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{200}{4} \right] + \left[ \frac{200}{3} \right] + \left[ \frac{200}{12} \right] = 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳۰۶
۱/۲۵	<p>در این مسئله <math>k + 1 = 7</math> یعنی <math>k = 6</math> است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی <math>n = 12</math> است. طبق اصل لانه ی کبوتری ، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش آموزان ، حداقل باید برابر <math>kn + 1 = (6 \times 12) + 1 = 73</math> باشد.</p>	۳۰۷
۱/۲۵	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[ \frac{90}{2} \right] + \left[ \frac{90}{3} \right] + \left[ \frac{90}{6} \right] = 45 + 30 - 15 = 60$	۳۰۸
۱/۲۵	<p>تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز تعداد لانه ها : <math>7 \times 12 = 84</math> داریم : <math>(7 = 6 + 1)</math> و <math>(505 = 84 \times 6 + 1)</math> طبق اصل لانه کبوتری لاقط ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p>	۳۰۹
۲	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی مانند <math>A</math> به یک مجموعه ۳ عضوی مانند <math>B</math></p> $1 \leq j \leq 3, A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ $ S  = 3^4,  A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4,  A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1^4$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0^4 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}  =  \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - (3 \times 16 - (3 \times 1)) = 36$	۳۱۰
۱/۵	<p>داریم : <math>k + 1 = 20 \rightarrow k = 19</math> , <math>1 + 1 = 2</math> , <math>6 = (4 \times 1) + 2</math></p> <p>طبق اصل لانه کبوتری ، تعداد لانه ها همان روزهای سال می باشد. (<math>n = 365</math>)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با <math>kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936</math></p>	۳۱۱



امیدواریم این فایل در جهت پیشبرد اهداف آموزشی مورد استفاده همکاران و دانش آموزان گرامی قرار بگیرد.  
نظرات و پیشنهادات خود را می توانید در سایت [www.math-pilevar.ir](http://www.math-pilevar.ir) ثبت کنید.

## گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان اردبیل

رقیه پيله ور - میکائيل صدقی

دی ۱۴۰۱



# کلاسهای کنکور ریاضی تجربی

(حرفه ای ترین جزوات ریاضیات در سراسر کشور)

مدرس: رحیم قهرمان (حضوری\_آنلاین)



-مدیر عامل انتشارات اندیشه قهرمان

-مؤلف کتاب های کنکور اندیشه قهرمان، گاج، مبتکران و...

-استاد پروازی شهرهای تهران، شیراز، اهواز و...

-طراح آزمون های قلم چی، مبتکران و...

شماره تماس جهت هماهنگی (واتساپ\_تلگرام)

۰۹۱۲۰۷۲۶۴۴۰