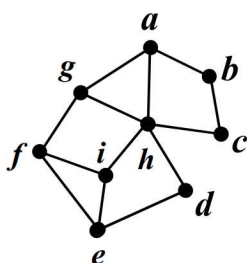
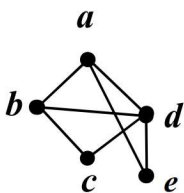


سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	رشته : ریاضی فیزیک	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $ a > b $. ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a \mid c, b \mid c)$ و $(\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m)$ آن گاه $[a, b] = c$. پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، در این صورت $a \equiv r^m$. ت) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲- است.	۱
۲	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.	۱
۳	اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$.	۰/۷۵
۴	باقی مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید.	۱
۵	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می نامیم. ب) گرافی را که تمام رؤوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف می نامیم. پ) تعداد یال های گراف K_4 ، برابر با است. ت) گراف G را می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.	۱
۷	به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید. الف) گراف C_4 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید. ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱
۸	الف) مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید. ب) برای گراف شکل روبه رو، یک مجموعه احاطه گر با ۴ عضو انتخاب کنید.	۱/۲۵

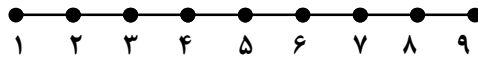



ادامه سؤالات در صفحه دوم

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	رشته : ریاضی فیزیک	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۹	عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.	۱/۲۵
۱۰	ابتدا گراف P_4 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.	۱
۱۱	گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. (الف) یک γ - مجموعه مشخص کنید. (ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.	۱/۵
۱۲	۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: (الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. (ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.	۱
۱۳	با ارقام ۱، ۱، ۱، ۳، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۴	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟	۱/۵
۱۵	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $1 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 2$ $3 \rightarrow 4$ $4 \rightarrow 1$ مربع لاتین B را به دست آورید. ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۲
۱۶	به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟	۱/۲۵
۱۷	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لاقلاً ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۱				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۱۰	رسم گراف (۰/۵). (تعریف گراف P_n صفحه ۳۸ و مشابه مثال صفحه ۵۱)						۱
							
$D = \{2, 5, 8\}$							
۱۱	الف) $D = \{h, c, e\}$ (۰/۵) ب) $D = \{g, c, i, e\}$ (۱) (در صورت ارائه مجموعه های مشابه با این ویژگی های نمره داده شود.) (مشابه سوال ۱۱ صفحه ۵۴)						۱/۵
۱۲	الف) $6! \times 6!$ (۰/۵) ب) $6! \times 5!$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۵۷)						۱
۱۳	$\frac{9!}{3! \times 2!}$ (۱) (مشابه مثال صفحه ۵۸)						۱
۱۴	$x_r = 4, x_\delta \geq 3 \Rightarrow x_\delta = y_\delta + 3$ (۰/۵) $x_1 + x_r + 4 + x_\phi + 3 + y_\delta + x_\epsilon = 12$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1 + x_r + x_\phi + y_\delta + x_\epsilon = 5$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \mathcal{C} = \binom{9}{4}$ (۰/۵) (تمرین ۹ صفحه ۷۱)						۱/۵
۱۵	الف) (ب)  (۰/۷۵) (۰/۷۵) متعامد نیستند. (۰/۲۵) زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (۰/۲۵) (مفهوم متعامد بودن صفحه ۶۴) (مشابه کار در کلاس صفحه ۶۴)						۲
۱۶	این سوال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی می توان نوشت. $\sum_{i=1}^3 \binom{5}{i} - (\sum_{i=1}^2 \binom{5}{i} - \binom{5}{1}) = 243 - 93 = 150$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۷۸)						۱/۲۵
۱۷	تعداد کیبوترها=۵۰۵ (۰/۲۵) و تعداد لانه ها= تعداد روزهای هفته \times تعداد ماه های سال. $n = 7 \times 12 = 84$ (۰/۲۵) طبق تعمیم اصل لانه کیبوتری: $kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6$ (۰/۲۵) $\Rightarrow k + 1 = 7$ (۰/۲۵) در این صورت لانه ای وجود دارد که لاقل ۷ کیبوتر در آن قرار می گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵) (سوال ۹ صفحه ۸۳)						۱/۲۵
۲۰	جمع نمره						

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک	تعداد صفحه: ۲	سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۱	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. (الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $1 + 2^n$ اول است. (ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱
۱/۲۵	a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.	۲
۰/۷۵	اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(5k + 9)$ و $(8k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$.	۳
۱	اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.	۴
۱/۲۵	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۵
۱/۷۵	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد). این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۶
۲/۲۵	با توجه به گراف (G) (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. (ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. (پ) درجه رأس a را در گراف \bar{G} تعیین کنید. (ت) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل) (ث) $N_G[f]$ را بنویسید.	۷
۱	به سؤالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید. (الف) یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟ (ب) در یک گراف از مرتبه ۸ با $\Delta = 3$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟	۸
۱/۵	به سؤالات زیر پاسخ دهید: (الف) گراف C_8 را رسم کنید. (ب) یک γ - مجموعه از آن مشخص کنید. (پ) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ - عضوی از آن را مشخص کنید.	۹

ادامه سؤالات در صفحه دوم

نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک	تعداد صفحه: ۲	سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۱۰	با توجه به گراف (G) به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.	۱/۲۵
۱۱	به چند طریق می توان ۴۵ دانش آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد ؟	۱
۱۲	برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.	۱
۱۳	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$ ($x_i \geq 0$ و $1 \leq i \leq 4$ و $x_5 = 2$)	۱/۵
۱۴	دومربع لاتین متعامد 3×3 را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید).	۱/۲۵
۱۵	تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)	۱/۲۵
۱۶	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است ؟	۱
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

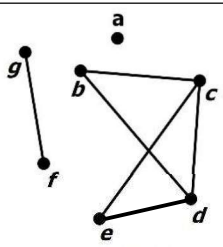
راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۱			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح			
۱	الف) نادرست، مثال نقض $n=3$ (۰/۵) (مشابه کاردرکلاس صفحه ۳) ب) درست (۰/۲۵)، اثبات: $a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1=2k'+1 \quad (۰/۲۵)$ (تمرین صفحه ۸)			
۱/۲۵	۲ اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، (۰/۲۵) پس هر سه عامل (a_1-b_1) و (a_2-b_2) و (a_3-b_3) هم باید فرد باشند، (۰/۲۵) در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد. (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. (۰/۲۵) (مثال صفحه ۶)			
۰/۷۵	۳ $\begin{cases} a 5k+9 \\ a 8k+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a 40k+72 \\ a 40k+65 \end{cases} \Rightarrow a 7 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a=1 \vee a=7 \quad (۰/۲۵)$ (مشابه مثال ۳ صفحه ۱۲)			
۱	۴ $\begin{cases} a=6q+3 \\ a=7q'+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a=42q+18 \\ 6a=42q'+30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42q=6q'+12 \\ 42q=6q'+36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=q'+1 \\ q=q'+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2 \\ q=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=15 \\ a=31 \end{cases}$ (مشابه مثال صفحه ۱۴)			
۱/۲۵	۵ عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0}$ را بسط می دهیم (۰/۲۵) و در هم نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم (۰/۲۵)، داریم: (فعالیت صفحه ۲۲). $A=10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (۰/۲۵)$			
۱/۷۵	۶ $\begin{cases} 5x+3y=42 \\ 5x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \equiv 42 \equiv 0 \pmod{3} \\ 5x \equiv 42 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3k \\ x=3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3k)+3y=42 \\ 5(3k)+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-5k+14 \\ y=-5k+14 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases} \pmod{3} ; \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \pmod{3} ; \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \pmod{3} \quad (۰/۲۵)$ (مشابه مثال صفحه ۲۸)			
۲/۲۵	۷ الف) $abgc$ (۰/۵) (تعریف مسیر صفحه ۳۸) ب) $bcdgcb$ (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) پ) ۵ (۰/۲۵) (مسأله صفحه ۳۷) ت) خیر (۰/۲۵) زیرا دارای رأس ایزوله است (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد.) (۰/۲۵) (تعریف گراف همبند صفحه ۳۹) ث) $N_G[f]=\{f\}$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶)			
۱	۸ الف) (مسئله ۱ صفحه ۳۸) $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55 \quad (۰/۵)$ ب) (صفحه ۴۹) $\left \frac{n}{\Delta+1} \right = \left \frac{8}{3+1} \right = 2 \quad (۰/۵)$			

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۱				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۹	الف) رسم گراف C_8 (۵/۰) (صفحه ۳۸) ب) $D = \{a, d, g\}$ (۵/۰) (تعریف صفحه ۴۴) پ) $\{a, c, e, g\}$: یک مجموعه احاطه گر مینیمال (۵/۰) (صفحه ۴۶)						۱/۵
۱۰	الف) $\{g, c\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$ (۵/۰) (مشابه تمرین ۳ صفحه ۵۲) ب) $\{h, d, b\}$ (۷۵/۰) (صفحه ۴۶)						۱/۲۵
۱۱	در صورتی که جواب را به فرم $\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$ هم نوشتند، نمره داده شود. (مثال صفحه ۵۹)						۱
۱۲	۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را به چند طریق می توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (۱ نمره) (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ های صحیح دیگر نمره داده شود) (تمرین صفحه ۷۱)						۱
۱۳	$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$ (۲۵/۰) $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 9$ (۲۵/۰) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$ (۲۵/۰) $\Rightarrow 36 + 10 = 46$ (۲۵/۰) $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5$ (۲۵/۰) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ (۲۵/۰) (مشابه سوال ۹ صفحه ۷۱)						۱/۵
۱۴	الف) به هر کدام از مربع های لاتین مانند نمونه زیر (۵/۰) نمره . متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری نداریم. (۲۵/۰) (صفحه ۶۴)						۱/۲۵
۱۵	اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (۲۵/۰) و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$ (۲۵/۰)، برای تعریف f روی هر عضو A ، ۷ انتخاب داریم (۲۵/۰)، بنابراین طبق اصل ضرب (۲۵/۰) تعداد کل تابع های یک به یک برابر است با $\frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ (۲۵/۰) (اگر دانش آموزی از فرمول $\frac{7!}{2!} = 7$ پاسخ دهد نمره کامل داده شود). (مشابه مثال صفحه ۷۸)						۱/۲۵
۱۶	۵ نقطه را کبوتر (۲۵/۰) و ۴ مثلث کوچک را لانه (۲۵/۰) در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری (۲۵/۰) ($4 < 5$) حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می گیرد. (۲۵/۰) (مشابه مثال صفحه ۸۲)						۱
جمع نمره						۲۰	

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع : ۱۰ صبح	پایه دوازدهم	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b+c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. پ) برای مقادیر حقیقی و نا صفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید . الف) حاصل $([m^2, m], m^5)$ برابر با است . ب) اگر برای دو عدد صحیح و نا صفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گوییم a و b هستند. پ) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم. ت) تعداد یال های گراف K_7 برابر است.	۱
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: « برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »	۱
۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(6m+5)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.	۱/۲۵
۵	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.	۱
۶	باقی مانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد)	۱/۵
۷	معادله همنهشتی $4x \equiv 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.	۱
۸	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است. ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲
۹	گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) دوری به طول ۴ بنویسید. پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید. ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵
		
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»		

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir		

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

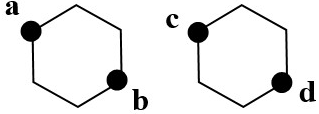
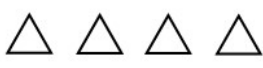
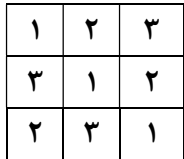
۱۰	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱
۱۱	یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۱۲	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟	۱
۱۳	به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟	۱/۷۵
۱۴	قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه ریزی کنید.	۱/۲۵
۱۵	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟	۱/۵
۱۶	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.	۱/۲۵
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) (صفحه) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)	۱
۲	الف) m^2 (۰/۲۵) ب) نسب به هم اول (۰/۲۵) (ص ۱۳) پ) مینیمال (۰/۲۵) (ص ۴۶) ت) ۲۱ (۰/۲۵) (ص ۳۸)	۱
۳	(۰/۲۵) $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$ (۰/۲۵) (ص ۷ و ۸) (۰/۲۵) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است $\Rightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵)	۱
۴	(ص ۱۱) (۰/۲۵) $a = \pm 1 \Rightarrow a \mid 1$ (۰/۲۵) $\rightarrow a \mid 5(\epsilon m + 5) - 6(\delta m + 4)$ (۰/۲۵) $\rightarrow a \mid 6(\delta m + 4)$ (۰/۲۵) $a \mid 5(\epsilon m + 5)$	۱/۲۵
۵	می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می باشد (۰/۲۵) $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم (ص ۱۶) $\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7 \text{ (۰/۲۵)}$ (۰/۲۵) $\rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7$	۱
۶	میدانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و پس داریم (ص ۲۹) $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 200! \equiv 3 \pmod{25}$	۱/۵
۷	چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد (۰/۲۵) (صفحه ۳۰) (۰/۲۵) $x = 3k + 1$ (۰/۲۵) $x \equiv 1 \pmod{3}$ (۰/۲۵) $4x \equiv 4 \pmod{10} \rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5}$	۱
۸	الف) مرتبه (۰/۵) ب) مسیر (۰/۵) پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۰/۵) ت) دور (۰/۵) (ص ۳۵ و ۳۸)	۲
۹	الف) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$ (۰/۵) ب) $bcedb$ (۰/۲۵) پ) $bced$ یا $bdec$ یا $bdce$ دو مورد هر کدام (۰/۲۵) ت) $N_G(f) = \{g\}$ (۰/۲۵) (ص ۴۱)	۱/۵
۱۰	روش اول می دانیم $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ پس داریم (۰/۲۵) $\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ بنابراین (۰/۲۵) $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم (۰/۲۵) $\gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رؤوس را احاطه می کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد. (۰/۲۵) و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) > 1$ بنابراین (۰/۲۵) $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ (ص ۳۹)	۱

«ادامه در صفحه ۲»

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۱	رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن (انمره)  (ص ۵۳) (به شکل های دیگر نیز نمره داده شود). مانند: 	۱
۱۲	(۰/۷۵) $4! \times 2^4 = 384 (۰/۲۵)$ (ص ۷۱)	۱
۱۳	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_2 = 3 \quad x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 (۰/۵) \xrightarrow{x_2=3 \quad x_4=y_2+3, x_5=y_5+5}$ $x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16 \quad (۰/۲۵) \quad x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0 (۰/۲۵) \rightarrow$ $\binom{5+4-1}{4-1} = 56 (۰/۷۵)$ (ص ۷۱)	۱/۷۵
۱۴	فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند. (۰/۲۵) طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (۰/۲۵) (ص ۶۲)  (۰/۷۵)	۱/۲۵
۱۵	$ A \cup B = s - A \cup B = s - A - B + A \cap B (۰/۲۵)$ $ s = 620 (۰/۲۵), A = 210 (۰/۲۵), B = 126 (۰/۲۵), A \cap B = 42 (۰/۲۵) \quad (ص ۸۳)$ $\Rightarrow A \cup B = 336 (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۶	ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است (ص ۸۴) (۰/۲۵) با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 (۰/۲۵) \Rightarrow AB^2 < 8 (۰/۲۵) \Rightarrow AB < \sqrt{8} (۰/۲۵)$	۱/۲۵
۲۰	جمع نمره	

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

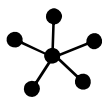
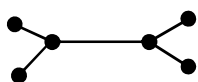
سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن گاه عدد شمارنده عدد است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.	۰/۷۵
۳	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.	۰/۷۵
۵	باقی مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.	۰/۷۵
۶	معادله $x \equiv 1 \pmod{7}$ را حل کنید.	۱
۷	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگ ترین درجه در گراف \bar{G} مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟	۲
۸	تفاوت بین مجموعه احاطه گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.	۱
۹	در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل، تعیین کنید.	۱/۵
۱۱	الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.	۱/۵
۱۲	کوتاه پاسخ دهید. می خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸، رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی که در آن ها حروف کنار هم باشند.	۱
« بقیه سؤالات در صفحه دوم »		

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
نمره			

۱۳	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم : از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۲
۱۴	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را B نام گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.	۱/۵
	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	
۱۵	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟	۱/۷۵
۱۶	الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟	۱
۱۷	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟	۰/۷۵
	"موفق باشید"	جمع نمره
		۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۰				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) (سوال ۱۵ صفحه ۱۷) ب) نادرست (۰/۲۵) (سوال ۴ صفحه ۸)						۰/۵
۲	الف) عدد a شمارنده عدد b است. (۰/۵) (مفهوم عاد کردن صفحه ۹) ب) $2m$ (۰/۲۵) (ب سوال ۱۶ صفحه ۱۷)						۰/۷۵
۳	$(۰/۲۵) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (۰/۲۵) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (۰/۲۵) \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (۰/۲۵) \Leftrightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ گزاره همواره درست (۰/۲۵) (مشابه الف سوال ۱ صفحه ۸)						۱/۲۵
۴	$(۰/۲۵) \quad p = 4k + 3 \quad (۴) \quad , \quad p = 4k + 2 = 2(2k + 1) \quad (۳) \quad , \quad p = 4k + 1 \quad (۲) \quad , \quad p = 4k \quad (۱)$ در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود. (۰/۲۵) (مشابه سوال ۲ صفحه ۱۵)						۰/۷۵
۵	$(۰/۲۵) \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \underbrace{(1000)^{25} \times 9 + 11}_{(۰/۲۵)} \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 1000 \equiv -1 \quad (۰/۲۵)$ (مشابه مثال صفحه ۲۱)						۰/۷۵
۶	$(۰/۲۵) \Rightarrow x = 4k + 3 \Rightarrow x \equiv 3 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x \equiv 3 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 7x \equiv 21 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 7x \equiv 1 \quad (۰/۲۵)$ (مشابه سوال ۱۴ صفحه ۳۰)						۱
۷	الف) $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (۰/۷۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶) ب) رأس f و 5 (۰/۵) (مکمل گراف صفحه ۳۷) پ) $abecda$ (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) ت) خیر (۰/۲۵) (تعریف گراف همبند صفحه ۳۹)						۲
۸	مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجموعه احاطه‌گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه‌گر مینیمال مجموعه احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعه احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد. هر مورد (۰/۲۵) (تعاریف صفحات ۴۴ و ۴۶)						۱
۹	$D = \{a, c, i, d\}$ (۱) (در صورتی که مجموعه های مشابه که ویژگی مسأله را داشت، نوشتند، نمره داده شود. (سوال ۴ صفحه ۴۶))						۱
۱۰	طبق قضیه داریم $\gamma(G) = 2 \leq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil$. (۰/۵) از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. (۰/۵) لذا $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 2$. (ب سوال ۳ صفحه ۵۲)						۱/۵
۱۱	الف)  (۰/۷۵) ب)  (۰/۷۵) (سوال ۸ صفحه ۵۳)						۱/۵
۱۲	الف) $6! \times 2!$ (۰/۵) ب) $2! \times 7!$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۵۶)						۱
۱۳	$(۰/۵) \quad x_1 + x_r + x_p + x_f + x_d + x_e = 12 \quad , \quad x_1 \geq 1 \quad , \quad x_f > 3 \quad , \quad x_e = 1$ $(۰/۲۵) \quad y_1 = x_1 - 1 \quad , \quad y_1 \geq 0 \quad , \quad y_f = x_f - 4 \quad , \quad y_f \geq 0$ $(۰/۲۵) \Rightarrow y_1 + x_r + x_p + y_f + 4 + x_d + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + x_r + x_p + y_f + x_d = 6 \Rightarrow \mathcal{C} = \binom{10}{4} \quad (۰/۵)$ (مشابه سوال ۸ صفحه ۷۱)						۲
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم							

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه																													
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸																															
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۰				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																															
ردیف		راهنمای تصحیح					نمره																												
۱۴		<div><div><table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table><p>(۰/۲۵)</p></div><div>\Rightarrow</div><div>$B =$</div><div><table><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table><p>(۰/۲۵)</p></div><div>\Rightarrow</div><div><table><tr><td>۲۱</td><td>۳۳</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>۳۳</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td></tr></table><p>(۰/۵)</p></div></div> <p>متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم. (۰/۵)</p> <p>(مشابه سوال ۱۳ صفحه ۷۲)</p>					۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۲۱	۳۳	۱۲	۱۲	۲۱	۳۳	۳۳	۱۲	۲۱	۱/۵	
۱	۲	۳																																	
۲	۳	۱																																	
۳	۱	۲																																	
۱	۳	۲																																	
۲	۱	۳																																	
۳	۲	۱																																	
۲۱	۳۳	۱۲																																	
۱۲	۲۱	۳۳																																	
۳۳	۱۲	۲۱																																	
۱۵		<p>$F =15, V =11, B =9, F \cap V =5, B \cap V =6, F \cap B =3$ $F \cap B \cap V =3$</p> <p>$= F - F \cap V - F \cap B + F \cap B \cap V =15-5-3+3=10$ (۰/۵) $= V - F \cap V - V \cap B + F \cap B \cap V =11-5-6+3=3$ (۰/۵) $= B - F \cap B - V \cap B + F \cap B \cap V =9-3-6+3=3$ (۰/۵) $\Rightarrow \text{ج} = 10+3+3=16$ (۰/۲۵)</p> <p>(ت سوال ۳ صفحه ۸۳)</p>					۱/۷۵																												
۱۶		<p>(الف) $3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36$ (۰/۵) (مثال صفحه ۷۷)</p> <p>(ب) $\frac{8!}{4!} = 1680$ (۰/۵) (مثال صفحه ۷۸)</p>					۱																												
۱۷		<p>$k+1=5 \Rightarrow k=4$ (۰/۲۵), $kn+1=54 \Rightarrow 4n=53$ (۰/۲۵), $n = \left\lfloor \frac{53}{4} \right\rfloor = 13$ (۰/۲۵)</p> <p>(سوال ۲ کار در کلاس صفحه ۸۲)</p>					۰/۷۵																												
		جمع نمره					۲۰																												

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع : ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۶/۲۷	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۰	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

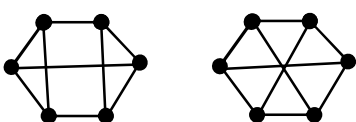
۱	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۲	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a \mid b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آن گاه $a^m \mid b^n$. ب) اگر $a \mid b$ آن گاه $(a, b) = a$. پ) اگر $a \equiv b^m$ باشد، آن گاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند. ت) منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه جواب های حقیقی است که در معادله $a x \equiv b$ صدق کند.	۱
۳	اگر $a > 1$ ، $a \mid 4k + 3$ و $a \mid 9k + 4$ ، ثابت کنید $a \mid 5k + 3$ عددی اول است.	۱
۴	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.	۱/۵
۵	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.	۱
۶	معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۵
۷	با توجه به گراف G (شکل مقابل)، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه رأس a در گراف G را تعیین کنید. ت) آیا گراف G همبند است؟ دلیل ارائه کنید. ث) $N_G(f)$ را معین کنید.	۲/۲۵
۸	گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.	۱/۲۵
۹	عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.	۱/۵
۱۰	در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.	۱
۱۱	می خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟	۱
۱۲	کوتاه پاسخ دهید. علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که: الف) علی و حسین کنار هم باشند. ب) ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.	۱

« بقیه سؤالات در صفحه دوم »

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع : ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۶/۲۷	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۰			
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۳	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد؟	۱/۵
۱۴	الف) تمام مربع های لاتین 2×2 را بنویسید. ب) آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.	۱/۲۵
۱۵	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟	۱/۵
۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟	۰/۷۵
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۰		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	راهنمای تصحیح			
نمره				
۱	فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌هیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. $(۰/۲۵)$ می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(۰/۲۵) r+x-r \in \mathbb{Q}$ یعنی $x \in \mathbb{Q}$ $(۰/۲۵)$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. $(۰/۲۵)$ (مثال صفحه ۵)			
۲	الف) درست $(۰/۲۵)$ (تمرین ۸ صفحه ۱۶) پ) درست $(۰/۲۵)$ (تمرین ۶ صفحه ۲۹) ب) نادرست $(۰/۲۵)$ (کار در کلاس صفحه ۱۳) ت) نادرست $(۰/۲۵)$ (تعریف صفحه ۲۴)			
۳	$(۰/۲۵) \Rightarrow a \mid 27-20 \Rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in P$ $(۰/۲۵)$ $(۰/۵) \Rightarrow a \mid 9(5k+3)-5(9k+4)$ (مشابه مثال صفحه ۱۲)			
۴	طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a=3k$ که بر ۳ بخش پذیر است. $(۰/۲۵)$ یا $a=3k+1$ $(۰/۲۵) \Rightarrow a+2=3(k+1)$ $(۰/۲۵)$ یا $a=3k+2$ $(۰/۲۵) \Rightarrow a+4=3(k+2)$ $(۰/۲۵)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش پذیر هستند. $(۰/۲۵)$ (مشابه سوال ۲ صفحه ۱۵)			
۵	$(۰/۲۵) \Rightarrow r=4$ $(۰/۲۵) \Rightarrow 9a+6 \equiv 24 \equiv 4$ $(۰/۲۵) \Rightarrow a \equiv 2$ $(۰/۲۵) \Rightarrow 4a-7 \equiv 3a-5$ (سوال ۱۰ صفحه ۲۹)			
۶	$(۰/۲۵) \Rightarrow 5x+2(5k+4)=18$ $(۰/۲۵) \Rightarrow y=5k+4$ $(۰/۵) \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{5}$ $(۰/۲۵) \Rightarrow 2y \equiv 18$ $(۰/۲۵) \Rightarrow x=-2k+2$ $(۰/۲۵)$ (مشابه سوال ۱۲ صفحه ۲۹)			
۷	الف) $abgc$ $(۰/۵)$ (تعریف مسیر صفحه ۳۸) ب) $bcdgb$ $(۰/۵)$ (تعریف دور صفحه ۳۸) پ) ۵ $(۰/۲۵)$ (مسئله صفحه ۳۸) ت) خیر $(۰/۲۵)$ زیرا دارای رأس ایزوله است هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. $(۰/۵)$ (تعریف گراف همبند صفحه ۳۹) ث) $N_G(f) = \{\}$ $(۰/۲۵)$ (مشابه مثال صفحه ۳۶)			
۸	$(۰/۲۵) \Rightarrow p=6$ $(۰/۲۵) \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p-3$ $(۰/۲۵) \Rightarrow q=2p-3$ $(۰/۲۵)$ به یکی از دو گراف زیر $(۰/۵)$ داده شود.  (مفهوم گراف منتظم صفحه ۳۵ و مشابه سوال ۶ صفحه ۴۲)			
۹	طبق قضیه داریم $2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor = 1$ $(۰/۵)$ از طرفی مجموعه $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. $(۰/۵)$ لذا $\gamma(G) \leq 2$ $(۰/۲۵)$. بنابراین $\gamma(G) = 2$ $(۰/۲۵)$ (مشابه فعالیت صفحه ۵۰)			
۱۰	$D = \{a, e, c, h\}$ (۱) (در صورتی که مجموعه‌های مشابه که ویژگی مسئله را داشت، نوشتند، نمره داده شود.) (مشابه سوال ۴ کار در کلاس صفحه ۴۶)			
۱۱	در صورتی که جواب را به فرم $\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}$ هم نوشتند، نمره داده شود. (مثال صفحه ۵۹) $\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$ $(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$			
۱۲	الف) $6! \times 2!$ $(۰/۵)$ ب) $2! \times 5!$ $(۰/۵)$ (مشابه مثال صفحه ۵۷)			
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم				

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۰		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	راهنمای تصحیح			
۱۳	<div>۱/۵</div> <div>$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0 \text{ (۰/۲۵)}, y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0 \text{ (۰/۲۵)}$</div> <div>$y_1 + 3 + x_1 + x_2 + y_4 + 4 + x_5 = 15 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow y_1 + x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 8 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (۰/۵)}$</div> <div>(مشابه سوال ۹ صفحه ۷۱)</div>			
۱۴	<div>۱/۲۵</div> <div>الف) دو نوع مربع لاتین مرتبه ۲ داریم.</div> <div>ب)</div> <div><div><div><div>۱۲</div><div>۲۱</div></div><div><div>۲۱</div><div>۱۲</div></div></div><div>(۰/۲۵)</div><div><div><div><div>۱</div><div>۲</div></div><div><div>۲</div><div>۱</div></div></div><div>(۰/۲۵)</div><div><div><div><div>۲</div><div>۱</div></div><div><div>۱</div><div>۲</div></div></div><div>(۰/۲۵)</div></div><div>متعامد نیستند. (۰/۲۵) زیرا در مربع بالاعدد دو رقمی</div><div>تکراری داریم. (۰/۲۵) (سوال ۲ کار در کلاس صفحه ۶۶)</div></div></div>			
۱۵	<div>۱/۵</div> <div>$A = \{1 \leq n \leq 200 n = 4k\} \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow A = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50 \text{ (۰/۲۵)}, B = \{1 \leq n \leq 200 n = 7k\} \text{ (۰/۲۵)}$</div> <div>$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 n = 28k\} \Rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7 \text{ (۰/۲۵)}$</div> <div>$A \cap B' = A - A \cap B \text{ (۰/۲۵)} = 50 - 7 = 43 \text{ (۰/۲۵)}$</div> <div>(سوال ۲ صفحه ۸۳)</div>			
۱۶	<div>۰/۷۵</div> <div>(مشابه مثال صفحه ۸۲)</div> <div>$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19 \text{ (۰/۲۵)}, \underbrace{kn + 1 = 19 \times 7 + 1}_{(۰/۲۵)} = 134 \text{ (۰/۲۵)}$</div>			
جمع نمره				
۲۰				

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع : ۱۰ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۱۰/۲۷	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۰	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ ، گویا) است. ب) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a \mid b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a \mid mb, ma \mid b)$. پ) اگر $a \mid b$ آن گاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با (a, a) است. ت) اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = d$ آن گاه رابطه $(a \equiv b, a \equiv b)$ برقرار خواهد بود.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵
۳	ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.	۱/۵
۴	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.	۱/۲۵
۵	معادله سیاله $6x + 7y = 185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۷۵
۶	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟	۰/۷۵ ۰/۵ ۰/۷۵
۷	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) هر مجموعه احاطه گر مینیمال، یک مجموعه احاطه گر مینیمم است. ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آن گاه $\gamma(G) > \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. پ) در گراف P_n عدد احاطه گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. ت) $\lceil 3/48 \rceil = 4$.	۱
۸	عدد احاطه گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه حل، تعیین کنید. 	۱/۵
۹	گراف C_{10} را رسم کنید. الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.	۱/۵

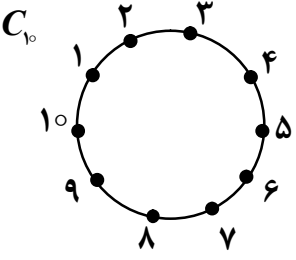
« بقیه سؤالات در صفحه دوم »

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع : ۱۰ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۱۰/۲۷	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۰			
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۰	می‌خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ت» و ۵ عدد ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آن‌ها حروف کنار هم باشند.	۰/۵
۱۱	با حروف کلمه <u>جیرجیرک</u> چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟	۱
۱۲	به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟	۱/۷۵
۱۳	در مربع لاتین A (شکل زیر) جای سطر اول و سوم را با هم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟	۱/۲۵
	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	
۱۴	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(1 \leq n \leq 300)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟	۱/۵
۱۵	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟	۱
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۴۰۰				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف		راهنمای تصحیح					
نمره							
۱	الف) گنگ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۵) ب) $a \mid mb$ (۰/۲۵) (ویژگی ۱ صفحه ۱۰) $\frac{m}{d}$ پ) $ a $ (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۱۳) ت) $a \equiv b$ (۰/۲۵) (ویژگی ۷ صفحه ۲۲)						
۲	فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. (۰/۲۵) می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in Q$ (۰/۲۵). یعنی $2\alpha \in Q$ (۰/۲۵). در نتیجه $\alpha \in Q$ (۰/۲۵) و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (۰/۲۵) (سوال ۳ صفحه ۸)						
۳	$a = 2k + 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ (۰/۲۵) $= 4k(k+1) + 1$ (۰/۲۵) $= 4 \times 2q + 1$ (۰/۲۵) $= 8q + 1$ (۰/۲۵) ضرب دو عدد صحیح متوالی $\Rightarrow r = 1$ (۰/۲۵) (مسئله ۳ صفحه ۱۵)						
۴	$a = bq + r$, $0 \leq r < b$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a - bq = r$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} n \mid a \\ n \mid b \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n \mid a - bq$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n \mid r$ (۰/۲۵) (تمرین ۱۲ صفحه ۱۷)						
۵	$6x \equiv 185$ (۰/۲۵) $= 23 \times 7 + 24$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 6x \equiv 24$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(6,7)=1} x \equiv 4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 7k + 4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 6(7k + 4) + 7y = 185$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y = -6k + 23$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۴ صفحه ۳۰)						
۶	الف) $7 - 4 = 3$ (۰/۷۵) (مفهوم اندازه گراف صفحه ۳۵ و مفهوم ماکزیمم درجه صفحه ۳۷) ب) $abcd a$ یا $a d b c a$ (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) پ) $q(G) = 8$ (۰/۲۵) $\Rightarrow q(\overline{G}) = 15$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7 + q(\overline{G}) = 15$ (۰/۲۵) $\Rightarrow q(G) = 8$ (۰/۲۵) (مسئله ۳ صفحه ۳۸)						
۷	الف) نادرست (۰/۲۵) (تعریف احاطه گر مینیمم صفحه ۴۴ و تعریف احاطه گر مینیمال صفحه ۴۶) ب) نادرست (۰/۲۵) (کادر بالای صفحه ۴۹) پ) درست (۰/۲۵) (تمرین ۵ صفحه ۵۳) ت) درست (۰/۲۵) (مفهوم سقف یک عدد در صفحه ۴۸)						
۸	طبق قضیه داریم $3 \leq \gamma(G)$ (۰/۵). از طرفی مجموعه $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵) لذا $\gamma(G) \leq 3$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (۰/۲۵). (مشابه کار در کلاس صفحه ۵۰)						
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم							

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷				
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۴۰۰				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir				
ردیف		راهنمای تصحیح					نمره	
۹	رسم نمودار (۰/۲۵) الف) $D = \{1, 4, 7, 10\}$ (۰/۵) (به گاما مجموعه های درست دیگر نیز نمره داده شود.) ب) $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (۰/۷۵) (به مجموعه های احاطه گر مینیمال درست دیگر نیز نمره داده شود.)  (مشابه سوال ۱۱ صفحه ۵۴)					۱/۵		
۱۰	(۰/۵) $6! \times 3!$					(مشابه مثال صفحه ۵۶)		۰/۵
۱۱	$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!}$ (۱)					(مشابه مثال صفحه ۵۸)		۱
۱۲	$x_1 + x_r + x_r + x_r + x_r + x_r = 10$ (۰/۲۵) $x_r \geq 4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y_r = x_r - 4, y_r \geq 0$ (۰/۲۵) $x_r > 2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y_r = x_r - 3, y_r \geq 0$ (۰/۲۵) $x_1 + x_r + y_r + 4 + x_r + x_r + y_r + 3 = 10$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1 + x_r + y_r + x_r + x_r + y_r = 3 \Rightarrow \mathcal{C} = \binom{8}{5}$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ صفحه ۷۱)					۱/۷۵		
۱۳	$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 23 & 31 \\ 33 & 11 & 22 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$ (۰/۲۵) (۰/۵) متعامدند. (۰/۲۵) زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد. (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۳ صفحه ۷۲)					۱/۲۵		
۱۴	$A = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 4k \ (k \in N)\}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A = \left[\frac{300}{4} \right] = 75$ (۰/۲۵) $B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 5k \ (k \in N)\}$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 20k \ (k \in N)\}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A \cap B = \left[\frac{300}{20} \right] = 15$ (۰/۲۵) $ A \cap B' = A - A \cap B $ (۰/۲۵) $= 75 - 15 = 60$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۲ صفحه ۸۳)					۱/۵		
۱۵	برای این که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. (۰/۲۵) بنابراین تعداد لانه ها برابر ۲ (۰/۲۵) و تعداد کبوترها ۳ است. (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (۰/۲۵) (سوال ۱۱ صفحه ۸۳)					۱		
جمع نمره					۲۰			

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $9k+7 \mid n$ و $7k+6 \mid n$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.	۱
۴	باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم نهشتی $2 \equiv x^5$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر گراف G می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.	۱
۷	گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۲، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲																
۱	۲	۳	۴																
۲	۱	۴	۳																
۴	۳	۲	۱																

۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱																		
	<table><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr></table> (الف)	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	<table><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr></table> (ب)	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲
۳	۲	۱																		
۱	۳	۲																		
۲	۱	۳																		
۲	۱	۳																		
۳	۲	۱																		
۱	۳	۲																		

بخش انتخابی

دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

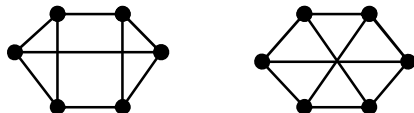
۱۵	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.	۱
۱۶	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. (الف) اندازه گراف G را بیابید. (ب) نمودار گراف G را رسم کنید.	۱
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. (ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱
۲۱	در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱
۲۲	قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱
۲۴	جمع نمره	"موفق باشید"

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
پاسخ سوالات الزامی		
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$ (۰/۲۵) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C$ (۰/۲۵) (مشابه قسمت ت کار در کلاس صفحه ۳) ب) درست (۰/۲۵) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(0/25)} - 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(0/25)} = 8q$ (مسأله ۳ صفحه ۱۵)	۱/۷۵
۲	$a = 4q + 3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r = 1$ (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۱۴)	۱/۲۵
۳	$n 9k + 7 \times (-7)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n -63k - 49 + 63k + 54$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n 5$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1$ یا 5 (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۲)	۱
۴	$7^2 = 49 \equiv 4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1$ (۰/۵) $\Rightarrow 7^{28} \equiv 1$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4} 7^{30} \equiv 4$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ و ۹ صفحه ۲۹)	۱/۵
۵	$2 \equiv 35$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 5x \equiv 35$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(5,11)=1} x \equiv 7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 11k + 7$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱۴ صفحه ۳۰)	۱/۲۵
۶	الف) دو برابر (۰/۲۵) (نتیجه ابتدای صفحه ۴۰) پ) مینیمم (۰/۲۵) (تعریف صفحه ۴۴) ب) k (۰/۲۵) (تعریف گراف منتظم صفحه ۳۵) ت) مینیمال (۰/۲۵) (تعریف صفحه ۴۶)	۱
۷	الف) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶) ب) دور به طول ۴ a, b, e, d, a (۰/۲۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) (در قسمت ب اگر دور را به صورت a, d, e, b, a نوشت، نمره داده شود). پ) مسیر به طول ۳، a, e, b, c (۰/۲۵) و مسیر به طول ۴، a, d, e, b, c (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۳۸)	۱/۲۵
۸	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 9 + 12 = p - 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p = 22$ (۰/۲۵) (مسأله ۱ صفحه ۳۸)	۰/۷۵
۹	الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا $\{a, b\}$ است. (۰/۲۵) (تمرین ۹ صفحه ۵۳) ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$. (۰/۲۵) (ذکر یک مجموعه کافی است). رسم گراف (۰/۲۵)	۱
۱۰	برای گراف مورد سوال داریم $\left\lceil \frac{1}{3+1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (۰/۵). از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است (۰/۲۵). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (۰/۲۵). (قسمت دوم کار در کلاس صفحه ۵۰)	۱/۲۵
۱۱	$\frac{7!}{2! \times 3!}$ (۰/۵) $= 42$ (۰/۲۵) (مشابه مثال پایین صفحه ۵۸)	۰/۷۵
۱۲	(قسمت پ تمرین ۸ صفحه ۷۱) $x_1 + \dots + x_5 = 11$, $x_2 \geq 2$, $x_5 \geq 4$ (۰/۲۵) $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ (۰/۲۵) \Rightarrow جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$ (۰/۵)	۱/۲۵

ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																		
۱۳	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ (0/5) مربع لاتین به صورت مقابل داریم. (مشابه تمرین 12 صفحه 72) (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.) <div><table><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr></table>(0/5)</div>	3	2	1	4	1	4	3	2	4	1	2	3	2	3	4	1	۱		
3	2	1	4																	
1	4	3	2																	
4	1	2	3																	
2	3	4	1																	
۱۴	<div><table><tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr><tr><td>۱۱</td><td>۳۳</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۱۲</td><td>۳۱</td></tr></table>(الف) (0/25)</div> <div><table><tr><td>۱۳</td><td>۲۱</td><td>۳۲</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۱</td><td>۳۲</td><td>۱۳</td></tr></table>(ب) (0/25)</div> <div>متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (0/۲۵) متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (0/۲۵) (مثال صفحه 65)</div>	۳۲	۲۱	۱۳	۱۱	۳۳	۲۲	۲۳	۱۲	۳۱	۱۳	۲۱	۳۲	۳۲	۱۳	۲۱	۲۱	۳۲	۱۳	۱
۳۲	۲۱	۱۳																		
۱۱	۳۳	۲۲																		
۲۳	۱۲	۳۱																		
۱۳	۲۱	۳۲																		
۳۲	۱۳	۲۱																		
۲۱	۳۲	۱۳																		
پاسخ سوالات اختیاری																				
۱۵	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$ (0/25) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ (0/25) $\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (0/25) چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است. (0/25) (قسمت الف تمرین 1 صفحه 8)	۱																		
۱۶	الف) $3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$ (0/5) ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (0/5) <div></div>	۱																		
۱۷	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ (0/25) از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج‌اند. (0/25) لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. (0/25) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (0/25) (صفحه 40)	۱																		
۱۸	الف) $4! \times 3!$ (0/5) ب) $4! \times 4!$ (0/5) (مشابه مثال صفحه 57)	۱																		
۱۹	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه 4 عضوی به مجموعه‌ای 8 عضوی (0/25)، یعنی: $(8)_4 = \frac{8!}{4!}$ (0/5) $= 168$ (0/25) (مثال پایین صفحه 78)	۱																		
۲۰	(مشابه کار در کلاس صفحه 76) $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow A = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ (0/25) $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow B = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$ (0/25) $A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$ (0/25) $\Rightarrow A \cup B = 16 + 10 - 3 = 23$ (0/25)	۱																		
ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم																				

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: 120 دقیقه																																																			
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸																																																					
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																																																					
ردیف		راهنمای تصحیح						نمره																																																	
۲۱		در این مسأله $k+1=7 \Rightarrow k=6$ (0/25) و تعداد لانه ها 12 است (0/25). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می‌بایست $kn+1=6 \times 12+1=73$ باشد. (0/5)						۱																																																	
۲۲		برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص کننده الیاف است. (سوال 14 صفحه 72)						۱																																																	
		<div><div><table><tr><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td></tr><tr><td>روز اول</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr></table><p>(0/25)</p></div><div>$= A$</div><div><table><tr><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td></tr><tr><td>روز اول</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table><p>(0/25)</p></div><div>$= B \Rightarrow$</div><div><table><tr><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td></tr><tr><td>روز اول</td><td>12</td><td>31</td><td>23</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>33</td><td>22</td><td>11</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>21</td><td>13</td><td>32</td></tr></table></div></div>							W_1	W_2	W_3	روز اول	1	3	2	روز دوم	3	2	1	روز سوم	2	1	3		W_1	W_2	W_3	روز اول	2	1	3	روز دوم	3	2	1	روز سوم	1	3	2		W_1	W_2	W_3	روز اول	12	31	23	روز دوم	33	22	11	روز سوم	21	13	32		
	W_1	W_2	W_3																																																						
روز اول	1	3	2																																																						
روز دوم	3	2	1																																																						
روز سوم	2	1	3																																																						
	W_1	W_2	W_3																																																						
روز اول	2	1	3																																																						
روز دوم	3	2	1																																																						
روز سوم	1	3	2																																																						
	W_1	W_2	W_3																																																						
روز اول	12	31	23																																																						
روز دوم	33	22	11																																																						
روز سوم	21	13	32																																																						
		عدد سمت چپ هر درآیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.																																																							
۲۰		جمع نمره																																																							

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

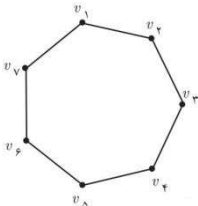
سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		ساعت شروع: ۸ صبح		تعداد صفحه: ۲	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته : ریاضی فیزیک		تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸							
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir							
ردیف		سوالات پاسخ نامه دارد					
		نمره					

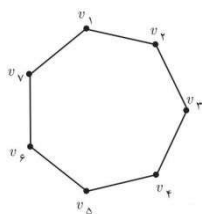
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱
۲	درجای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد. (ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل راس برای احاطه همه رئوس لازم است. (ج) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است. (د) مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر است.	۲
۳	اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف G می باشد. (الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. (ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. (ج) مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید.	۱/۵
۷	گراف C_V را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. (ب) عدد احاطه گری C_V را به دست آورید. (ج) دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	(الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟ (ب) در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.	۱/۵
	« بقیه سوالات در صفحه دوم »	

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		ساعت شروع: ۸ صبح		تعداد صفحه: ۲	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته : ریاضی فیزیک		تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸							
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir							
ردیف		سوالات پاسخ نامه دارد					
		نمره					

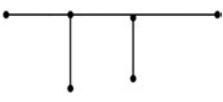
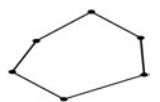
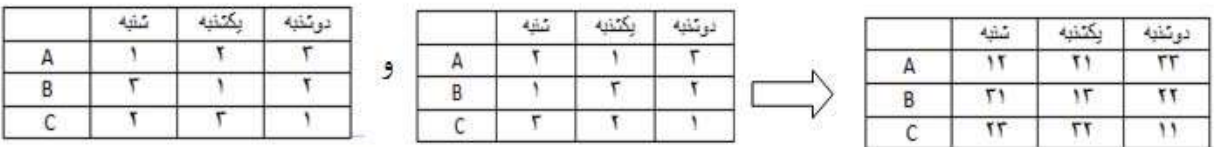
۹	الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۲, ۴, ۴, ۵ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت.	۱
۱۱	۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند ، به طوری که : الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0, i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد ، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	"موفق باشید"	جمع نمره
		۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵	
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۸			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره

۱	اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود (۰/۵) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (صفحه: ۷) گزاره همیشه درست $\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b-2\sqrt{ab}}_{(0/25)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}_{(0/25)} \geq 0$	۱														
۲	الف) ۲۸ (۰/۵) ب) ۳ راس (۰/۵) ج) $p-1$ (۰/۵) د) ۱۵ (۰/۵) (صفحه: ۶۲ و ۵۳ و ۴۹ و ۳۸)	۲														
۱/۵	(صفحه: ۱۴) $m = 13q_1 + 2$ (۰/۵) $3m = 13(3q_1) + 6$ (۰/۵) $\rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39$ (۰/۲۵) $n = 13q_2 + 9$ (۰/۵) $5n = 13(5q_2) + 45$ (۰/۲۵) $\rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \rightarrow r = 0$ (۰/۲۵)	۳														
۱	روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر میگیریم ۲۹ روز درمهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم: (۰/۲۵) <table border="1"><tr><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td><td>س</td><td>چ</td><td>پ</td><td>ج</td></tr><tr><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td></tr></table> $29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5^7$ (۰/۵) که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)	ش	ی	د	س	چ	پ	ج	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۴
ش	ی	د	س	چ	پ	ج										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۱/۵	(صفحه: ۲۵) $\underbrace{2y \equiv 18}_{(0/25)} \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9$ (۰/۵) $\Rightarrow y \equiv 9 \equiv 4$ (۰/۲۵) $y = 5k + 4$ (۰/۲۵) و $x = -2k + 2$ (۰/۲۵)	۵														
۱/۵	الف) (۰/۲۵) $p = 6$ (۰/۲۵) ، $q = 7$ (۰/۲۵) ب) $N_G(b) = \{a, d, c\}$ (۰/۲۵) ج) $\text{تعداد یال های گراف } G + \text{تعداد یال های گراف } \bar{G} = \frac{p(p-1)}{2}$ (۰/۲۵) \bar{G} (۰/۲۵) $\Rightarrow \text{مجموع درجه های رئوس گراف } \bar{G} = 16$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \text{تعداد یال های گراف } \bar{G} = 8$ (۰/۲۵) (صفحه: ۴۱)	۶														
۱/۵	الف) $\gamma(G) = 3$ (۰/۵) ب) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ (۰/۵) ج) $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$ (۰/۵) (صفحه: ۴۵) 	۷														



راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	راهنمای تصحیح		
	نمره		

۸	الف) اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه گر مینمال باقی می ماند. (۰/۲۵) بنا بر این عضو ی مانند a_1 را در نظر میگیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم (۰/۲۵) در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم. (۰/۲۵) ب) $A = \{h, g, f, i, j\}$ (۰/۷۵) (صفحه: ۴۶)	۱/۵
۹	الف)  (۰/۵) ب)  (۰/۵) (صفحه: ۵۳)	۱
۱۰	$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} \rightarrow P = 3 \times 7! \quad (۰/۲۵) \quad (۰/۷۵)$ (صفحه: ۵۸)	۱
۱۱	الف) $5! \times 6! \quad (۰/۵)$ ب) $5! \times 7! \quad (۰/۵)$ ج) $10! \times 2! \quad (۰/۵)$ (صفحه: ۵۷)	۱/۵
۱۲	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 10$ $x_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{(۰/۲۵)} \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} \quad (۰/۵)$ (صفحه: ۷۲)	۱
۱۳	 (صفحه: ۶۹) (۰/۵)	۱/۵
۱۴	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$ $n(A \cup B) = \left\lfloor \frac{90}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{90}{6} \right\rfloor \quad (۰/۷۵) \quad n(A \cup B) = 60 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۸۴)	۱/۲۵
۱۵	تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش آموز (۰/۲۵) $6 + 1 = 7 \quad (۰/۵)$ تعداد لانه ها: $7 \times 12 = 84 \quad (۰/۲۵)$ طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)	۱/۲۵

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۱۰ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۱۰/۲۷	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱	گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است. ب) برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a b$ آن‌گاه $ a, b = b $. پ) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b^m \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) m$.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱/۵
۳	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.	۱
۴	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(2a + 3, 5a + 4)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۵	باقی‌مانده تقسیم $(38^{36} + 19)$ را بر ۴ به دست آورید.	۱/۲۵
۶	معادله هم‌نهشتی $8x \equiv 2^{12} \pmod{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۱
۷	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف) مرتبه گراف نشان دهنده تعداد گراف می‌باشد. ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم. پ) دو یال را می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند. ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.	۱
۸	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید. الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟ ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید. پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۲
۹	الف) گراف k - منتظم را تعریف کنید. ب) گراف P_n را رسم کنید. پ) آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟	۱
۱۰	در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است: الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.	۲
۱۱	با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که: الف) اعداد زوج کنار هم باشند. ب) اعداد فرد کنار هم باشند.	۱
« بقیه سوالات در صفحه دوم »		

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۱۰ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۱۰/۲۷	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۹			
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

۱۲	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $x_5 = 2$ و $x_6 > 2$ باشند.	۱/۵									
۱۳	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $A =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> </div> <p>الف) با اعمال یک جایگشت روی درآیه های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید. ب) متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.</p>	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲
۲	۱	۳									
۳	۲	۱									
۱	۳	۲									
۱۴	مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.	۱/۵									
۱۵	حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیر تکراری است؟	۱									
	"موفق باشید"	جمع نمره									
		۲۰									

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۱۰/۲۷		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	راهنمای تصحیح			
نمره				
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) ، $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$ (قسمت پ کار در کلاس صفحه ۳) ب) درست (۰/۲۵) (قسمت ب سوال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۳) (پ) درست (۰/۲۵) (قضیه صفحه ۲۵)			
۲	فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. (۰/۲۵) (تمرین ۳ صفحه ۸) $\alpha - \beta = m \in Q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2\alpha = m + n$ (۰/۲۵) $\alpha + \beta = n \in Q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \alpha \in Q$ تناقض با فرض (۰/۲۵)			
۳	۱ $a = 17q + 5$ (۰/۲۵) $b = 17q' + 3$ $\Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۴)			
۴	$1/25$ $(5a + 4, 2a + 3) = d \Rightarrow d 2a + 3$ (۰/۲۵) $d 5a + 4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow d -2(5a + 4) + 5(2a + 3)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow d 7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow d = 1$ یا 7 (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۶)			
۵	$1/25$ $38 \equiv 2 \pmod{4} \rightarrow 38^2 \equiv 4 \pmod{4} \rightarrow 38^{36} \equiv 0 \pmod{4}$, $19 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 38^{36} + 19^3 \equiv 3 \pmod{4}$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۹ صفحه ۲۹)			
۶	۱ $8x \equiv 2 \pmod{12} \xrightarrow{(8,12)=4} x \equiv 4 \pmod{4} \Rightarrow x = 3k + 4$ (۰/۲۵) $\frac{12}{4}=3$ (۰/۲۵) (قسمت ب تمرین ۱۴ صفحه ۳۰)			
۷	الف) رئوس (۰/۲۵) (تعریف مرتبه صفحه ۳۵) ب) طوقه (۰/۲۵) (تعریف طوقه صفحه ۳۶) پ) مجاور (۰/۲۵) (تعریف دو یال مجاور صفحه ۳۶) ت) زوج (۰/۲۵) (نتیجه قضیه صفحه ۴۰)			
۸	الف) ۳ (۰/۲۵) (مسئله ۱ صفحه ۳۸) ب) b, d, c, b (۰/۵) ، a, b, c, a (۰/۵) ، a, b, d, c, a (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) توجه: در قسمت (ب) ممکن است دانش آموز شروع دور را با رأس دیگری آغاز کرده باشد. مثلاً دور b, d, c, b را به فرم d, b, c, d نوشته باشد. به این دورها نیز نمره داده شود. پ) ۴ (۰/۲۵) (مفهوم ماکزیمم درجه صفحه ۳۷)			
۹	الف) گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد. (۰/۵) (تعریف گراف منتظم صفحه ۳۵) ب) $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ (۰/۲۵) (تعریف P_n صفحه ۳۸) (پ) بله (۰/۲۵) (مفهوم گراف منتظم صفحه ۳۵)			
ادامه پاسخها در صفحه دوم				

ادامه پاسخها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۱۰/۲۷			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۹				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۱۰	الف) $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$ (۰/۷۵) (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۵۴) ب) $\left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor = 2$ (۰/۲۵) بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ (۰/۲۵) (*). از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه احاطه گر است (۰/۲۵) لذا $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵) (**). از (*) و (**) نتیجه می شود که $\gamma(G) = 2$ (۰/۲۵). (مشابه تمرین ۳ صفحه ۵۲)						۲
۱۱	الف) $3! \times 3! = 36$ (۰/۵) ب) $2! \times 4! = 48$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۵۶)						۱
۱۲	$y_7 = x_7 - 3, y_7 \geq 0$ (۰/۲۵), $x_8 = 2$ $x_1 + y_7 + 3 + x_7 + x_8 + 2 + x_6 = 17$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1 + y_7 + x_7 + x_8 + x_6 = 12$ (۰/۲۵) \Rightarrow تعداد جواب ها $= \binom{16}{4}$ (۰/۵) (مشابه تمرین ۵ کار در کلاس صفحه ۶۱)						۱/۵
۱۳	الف) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۰/۷۵) ب) $\begin{bmatrix} 21 & 13 & 32 \\ 32 & 21 & 13 \\ 13 & 32 & 21 \end{bmatrix}$ (۰/۷۵) متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم. (۰/۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۶۴ و مفهوم متعامد بودن صفحه ۶۵)						۲
۱۴	$A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in Z\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$ (۰/۲۵) $B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in Z\} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$ (۰/۲۵) $A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in Z\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$ (۰/۲۵) $ \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$ (۰/۲۵) (مشابه فعالیت صفحه ۷۵)						۱/۵
۱۵	$n = 32 \times 31 = 992$ (۰/۲۵), $k+1=3 \Rightarrow k=2$ (۰/۲۵) تعداد کبوترها $= 2 \times 992 + 1 = 1985$ (۰/۵) (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۸۲)						۱
۲۰	جمع نمره						

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$. پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۱/۲۵	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.	۲
۱/۲۵	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a 3n+4$ و $a 2n+3$. نشان دهید $a=1$.	۳
۱/۵	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	۴
۱/۲۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۵
۱/۲۵	رقم یکان عدد $(7 + 3^{11})$ را به دست آورید.	۶
۱	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۷
۲/۵	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث) آیا گراف G همبند است؟	۸
۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۹
۱/۵	عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.	۱۰
۰/۷۵	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۱۱
۱/۲۵	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_3 > 3$ باشند؟	۱۲
۰/۵	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۱۳

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹			
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

بخش انتخابی

دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۴ تا ۲۱ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۴	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b^m$, $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n$.	۱																		
۱۵	آیا گراف ۷ رأسی ۳- منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱																		
۱۶	گراف P_8 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱																		
۱۷	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.	۱																		
	<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۱۸	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.	۱																		
۱۹	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)	۱																		
۲۰	۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود).	۱																		
۲۱	نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.	۱																		
	" موفق باشید "	جمع نمره																		
		۲۴																		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴		
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

پاسخ سوالات الزامی

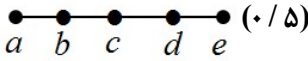
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) کار در کلاس صفحه ۳ ب) درست (۰/۲۵) (مثال صفحه ۴) پ) نادرست (۰/۲۵) کار در کلاس صفحه ۷ ت) نادرست (۰/۲۵) (مشابه قسمت ث کار در کلاس صفحه ۳)	۱
۲	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ (۰/۲۵) نابرابری آخر برای a, b نامنفی همیشه درست است. (۰/۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (مثال صفحه ۷)	۱/۲۵
۳	$a 3n+4 \Rightarrow a \underbrace{-2(3n+4)}_{(0/25)} + \underbrace{2(2n+3)}_{(0/25)} \Rightarrow a 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow a = 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}}$ (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱)	۱/۲۵
۴	هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p = 6k$ (۱), $p = 6k+1$ (۲), $p = 6k+2 = 2(3k+1)$ (۳) $p = 6k+3 = 3(2k+1)$ (۴), $p = 6k+4 = 2(3k+2)$ (۵), $p = 6k+5$ (۶) p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است (۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (۰/۲۵) (مسئله ۲ صفحه ۱۵)	۱/۵
۵	$m = 17q + 5 \quad (q \in \mathbb{Z})$ (۰/۵) $n = 17q' + 3 \quad (q' \in \mathbb{Z})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r = 12$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۶	$2^5 \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^2 \pmod{25} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{25} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \equiv 5 \pmod{25}$ (۰/۲۵) رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۲۹)	۱/۲۵
۷	$2x \equiv 19 \pmod{25} \xrightarrow{(2,25)=1} x \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow x = 25k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3$ (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۷)	۱
۸	الف) $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 0$ (۰/۵) ب) c, a, b, c (۰/۲۵), c, a, e, c (۰/۲۵), c, e, d, c (۰/۲۵) پ) ۵ (۰/۲۵) ت) $N_G(e) = \{a, c, d\}$ (۰/۷۵) (مفاهیم اساسی گراف از صفحه ۳۲ تا صفحه ۳۹) (ث) خیر (۰/۲۵)	۲/۵
۹	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Leftrightarrow p = 5$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۶ صفحه ۴۲) رسم گراف (۰/۲۵)	۱
۱۰	با توجه $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. (۰/۲۵) از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq 2$ در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری). (۰/۲۵) (قسمت الف تمرین ۳ صفحه ۵۲)	۱/۵
۱۱	$\frac{8!}{3! \times 4!}$ (۰/۷۵) (به راه حل $\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ نیز نمره داده شود.) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۵۹)	۰/۷۵

ادامه پاسخها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																
۱۲	<p>$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1$ (۰/۲۵) , $y_r = x_r - 4 \geq 0 \Rightarrow x_r = 4 + y_r$ (۰/۲۵) \Rightarrow (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۶۱)</p> <p>$1 + y_1 + x_r + 4 + y_r + x_f + x_d = 14$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y_1 + x_r + y_r + x_f + x_d = 9$ (۰/۲۵)</p> <p>\Rightarrow جواب: $= \begin{pmatrix} 9+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵																
۱۳	<p>(توضیحات صفحه ۶۳)</p> <div><table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table><p>(۰/۵)</p></div>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۰/۵
۱	۲	۳	۴															
۴	۱	۲	۳															
۳	۴	۱	۲															
۲	۳	۴	۱															

پاسخ سوالات اختیاری

۱۴	۱ $a \equiv b \Rightarrow m a-b$ (۰/۲۵) $\Rightarrow m (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow m a^n - b^n$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^n \equiv b^n$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۹)	۱									
۱۵	۱ وجود ندارد. (۰/۲۵) زیرا: (۰/۲۵) زوج $2q = 21$ فرد $\Rightarrow 3 \times 7 = 2q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \sum_{i=1}^7 \deg v_i = 2q$ (سوال ۸ صفحه ۳۸) همکاران گرامی، در صورتی که دانش آموزی با رسم شکل هم توضیح داد، نمره داده شود.	۱									
۱۶	۱ (صفحه ۳۸) a, b, c, d (۰/۲۵) , b, c, d, e (۰/۲۵)  (۰/۵)	۱									
۱۷	۱ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۶۶) <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> (۰/۷۵)	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱
۱۱	۲۲	۳۳									
۳۲	۱۳	۲۱									
۲۳	۳۱	۱۲									
۱۸	۱ (مثال صفحه ۷۴) $ \overline{F \cup V} = S - F \cup V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)	۱									
۱۹	۱ $A = \{a_1, a_r, a_s\}$, $b = \{b_1, b_r, \dots, b_s\}$ (فعالیت صفحه ۷۹) به ۶ طریق $f(a_1)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f(a_1) = b_1 \vee b_r \vee \dots \vee b_s \Rightarrow$ به ۵ طریق $f(a_r)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f \Rightarrow f(a_r) \neq f(a_1) \Rightarrow$ یک به یک به ۴ طریق $f(a_s)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f \Rightarrow f(a_s) \neq f(a_1), f(a_s) \neq f(a_r) \Rightarrow$ یک به یک بنابراین طبق اصل ضرب $6 \times 5 \times 4 = 120$ تابع یک به یک داریم. (۰/۲۵) (به روش $P(6,3) = \frac{6!}{3!} = 120$ نیز نمره داده شود.)	۱									
۲۰	۱ حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است. (۰/۵) که برابر با 8^4 است. (۰/۵) (مثال صفحه ۷۸)	۱									
۲۱	۱ فصل تولد = لانه = ۴ (۰/۲۵) و افراد خانواده = کبوتر = ۵ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (۰/۲۵) (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۸۰)	۱									
۲۴	جمع نمره										

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۱۰ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۱۰/۰۹	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره	

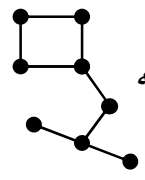
۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a b$ آن گاه $ a, b = b $. ب) معادله هم‌نهشتی $a x \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) m$. پ) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. ت) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۶ است.	۱
۲	به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.	۱
۳	اگر عدد طبیعی $a > 1$ ، در دو شرط $a 4k + 9$ و $a 6k + 14$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	۱
۴	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.	۱
۵	باقی مانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.	۱
۶	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b^m$ آن گاه $ac \equiv bc^m$.	۱
۷	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.	۱/۵
۸	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) اندازه گراف را تعیین کنید. پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید. ت) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، کدام رأس است x ؟	۱/۲۵
۹	الف) گراف k - منتظم از مرتبه n را تعریف کنید. ب) آیا گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.	۱
۱۰	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید. ب) مکمل گراف G را رسم کنید.	۱

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۱۰ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۱۰/۰۹	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

۱۱	<p>برای گراف روبه‌رو:</p> <p>الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.</p> <p>ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.</p>		۱/۲۵
۱۲	<p>اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد،</p> <p>الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.</p> <p>ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.</p>		۱/۲۵
۱۳	با حروف کلمه « می سی سی پی » چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟		۱
۱۴	<p>۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری که:</p> <p>الف) کتاب‌ها یکی در میان قرار گیرند.</p> <p>ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند.</p>		۱/۲۵
۱۵	معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $X_1 > 2$ و $X_3 > 3$ باشند.		۱
۱۶	بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟		۰/۷۵
۱۷	با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.		۱/۷۵
۱۸	مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.		۱
	جمع نمره	"موفق باشید"	۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۸			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) (قسمت ب سوال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۳) ب) نادرست (۰/۲۵) (قضیه صفحه ۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) (نتیجه ابتدای صفحه ۴۰) ت) درست (۰/۲۵) (نکته قسمت دوم فعالیت صفحه ۷۸)			۱
۲	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می باشد. (۰/۲۵) (مثال اول صفحه ۷)			۱
۳	$\begin{aligned} a 4k+9 \\ a 6k+14 \end{aligned} \Rightarrow a \underbrace{-6(4k+9)}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{4(6k+14)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a 2 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{a>1} a=2 \quad (۰/۲۵)$ (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱ سوال ۱)			۱
۴	$A=21a^2=3 \times 7 \times a^2 \quad (۰/۲۵), \quad B=35a^2=5 \times 7 \times a^2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow [A,B]=105a^2 \quad (۰/۵)$ (مشابه سوال ۱۶ صفحه ۱۷)			۱
۵	$13 \equiv -4 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{17} 13^2 \equiv 16 \equiv -1 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{17} 13^{22} \equiv -1 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{-1 \equiv 16} r=16 \quad (۰/۲۵)$ (مشابه سوال ۹ صفحه ۲۹)			۱
۶	$a \equiv b \Rightarrow m a-b \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m c(a-b) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m ac-bc \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ac \equiv bc \quad (۰/۲۵)$ (ویژگی ۲ صفحه ۱۹)			۱
۷	$13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16 \quad (۰/۲۵)) \rightarrow 4y \equiv 16 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{(4,9)=1 \quad (۰/۲۵)} y \equiv 4 \quad (۰/۲۵)$ $y=9k+4 \quad (۰/۲۵), \quad x=-13k-5 \quad (۰/۲۵)$ (لطفاً برای راه حل های دیگر بارم مناسب در نظر بگیرید.) (مشابه سوال ۱۲ صفحه ۲۹)			۱/۵
۸	الف) $\delta(G)=1$ (۰/۲۵) ب) $q=6$ (۰/۲۵) پ) $N_G[b]=\{b,a,c,d\}$ (۰/۵) ت) $x=c$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۲ صفحه ۴۱)			۱/۲۵
۹	الف) گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد $k, (0 \leq k < n)$ باشد. (۰/۵) (تعریف صفحه ۳۵) ب) وجود ندارد. (۰/۲۵) زیرا: تناقض (۰/۲۵) $5 \times 3 = 2q \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 \times 3 = 2q$ (قسمت ت سوال ۸ صفحه ۴۲)			۱
۱۰	الف) a,c,d,b,e,a (۰/۵) ب) (مشابه شکل ۱۶ صفحه ۳۷) (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸)			۱
۱۱	الف) مجموعه احاطه گر با ۴ عضو مانند: $\{c,f,h,g\}$ (۰/۵) ب) احاطه گر مینیمال مانند: $\{c,f,g\}$ (۰/۷۵) (لطفاً برای راه حل های دیگر بارم مناسب در نظر بگیرید.) (کار در کلاس صفحه ۴۷)			۱/۲۵
ادامه پاسخ ها در صفحه دوم				

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه									
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹										
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir											
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره									
۱۲	<p>(الف) برای مثال اگر $n=10$، رسم C_{10} یا P_{10} (۰/۲۵) در این گراف ها: $\gamma(G)=\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor=4$ (۰/۲۵) . (کار در کلاس صفحه ۴۹)</p> <p>(ب) در گرافی مشابه $\gamma(G)=3$ (۰/۲۵) ولی $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor=2$ (۰/۲۵) . (فعالیت صفحه ۵۰)</p>  <p>(لطفاً برای راه حل های دیگر بارم مناسب در نظر بگیرید.)</p>												
۱۳	<p>(مشابه مثال صفحه ۵۸) $\frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 840$ (۰/۲۵)</p>												
۱۴	<p>(الف) $6! \times 5!$ (ب) $6! \times 5! \times 2! \times 5!$ (مشابه مثال صفحه ۵۷)</p>												
۱۵	<p>$y_1 + x_r + y_r + x_f + x_d = 14 \Rightarrow y_1 + x_r + y_r + x_f + x_d = 7$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{4}$ (۰/۲۵)</p> <p>(مشابه سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۶۱)</p>												
۱۶	<p>متعامدند. زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین ،عدد تکراری نداریم. (۰/۲۵)</p> <p>(شماره ۳ کار در کلاس صفحه ۶۶)</p> <table border="1" data-bbox="221 1162 413 1319"><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr></table> <p>(۰/۵)</p>				۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲
۱۱	۲۲	۳۳											
۳۲	۱۳	۲۱											
۲۳	۳۱	۱۲											
۱۷	<p>$1 \leq j \leq 3 \quad A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j \quad 1 \leq i \leq 4\}$</p> <p>$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ (۰/۲۵)</p> <p>$S = 3^4$ (۰/۲۵) , $A_i = 2^4$ (۰/۲۵) , $A_i \cap A_j = 1^4$ (۰/۲۵) , $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ (۰/۲۵)</p> <p>$\underbrace{ A_1 \cup A_2 \cup A_3 }_{(۰/۲۵)} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$ (۰/۲۵)</p> <p>(مشابه فعالیت صفحه ۷۷)</p>												
۱۸	<p>(سوال ۱۲ صفحه ۸۳)</p> <p>تعداد کبوترها = ۴۳ (۰/۲۵) و تعداد لانه ها = ۴۲ و به صورت زیر هستند. (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵)</p> <p>_____ , _____ , _____ , , _____ ۱,۸۴ ۲,۸۳ ۳,۸۲ ۴۲,۴۳</p> <p>چنان چه قرار باشد کبوترها لانه ها را اشغال کنند، آن گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعه شان ۸۵ است. (۰/۲۵)</p>												

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

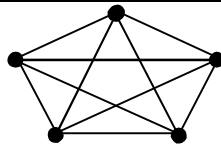
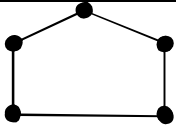
سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		ساعت شروع : ۸ صبح		رشته : ریاضی فیزیک	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تعداد صفحه: ۲		تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۶/۴		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریورماه سال ۱۳۹۸				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف		سوالات پاسخ نامه دارد					
		نمره					

۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف) مجموع هر دو عدد فرد ، عددی زوج است. ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۵/۱
۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) $a c, b c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$ ب) گراف G را $\dots\dots\dots$ می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. ج) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: $\dots\dots\dots$ د) هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در $\dots\dots\dots$ لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل $\dots\dots\dots$ کبوتر در آن قرار گرفته است.	۵/۱
۳	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۵/۱
۴	اگر باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۵، ۶ به ترتیب ۲، ۳ باشد؛ باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۵/۱
۵	باقی مانده تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.	۵/۱
۶	با تبدیل معادله سیاله خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.	۵/۱
۷	گراف G با مجموعه راس های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال های زیر در نظر بگیرید: $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ الف) نمودار گراف را رسم کنید. ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.	۲
۸	یک گراف ۵ راسی غیر تهی k -منتظم رسم کنید به طوری که: الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
	« بقیه سؤالات در صفحه دوم »	

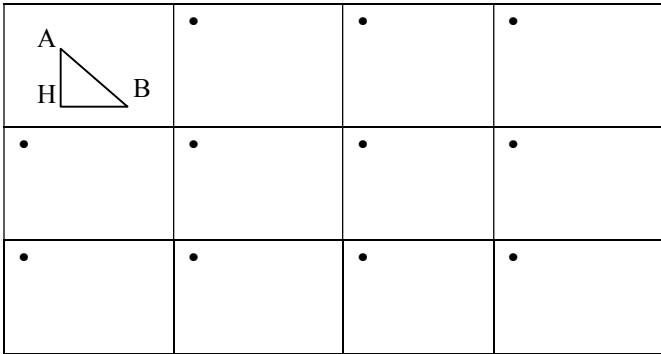
سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		ساعت شروع : ۸ صبح		رشته : ریاضی فیزیک	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تعداد صفحه: ۲		تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۶/۴		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریورماه سال ۱۳۹۸				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف		سوالات پاسخ نامه دارد					
		نمره					

۹	الف) گراف p_8 را رسم کنید. ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید. ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱/۵
۱۰	در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید ؛ سپس با حذف برخی از راس ها، آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید. 	۱
۱۱	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که: الف) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند. ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند ، برای این منظور برنامه ریزی نمایید.	۱
۱۴	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد.	۱/۵
۱۵	۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند ؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم ، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.	۱/۵
	" موفق باشید "	جمع نمره
	۲۰	

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۶/۴			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۸				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف		راهنمای تصحیح					نمره
۱	الف) درست ۰/۲۵ ب) نادرست ۰/۲۵ صفحه ۳ کتاب					۰/۵	
۲	الف) ۰/۵ $\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$ ب) همبند ۰/۲۵ ج) $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ ۰/۲۵ د) به ترتیب متن سوال n و (k+1) ۰/۵ صفحات ۱۳ و ۳۹ و ۸۲ کتاب					۱/۵	
۳	$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ ۰/۲۵ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$ ۰/۵ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ ۰/۵ چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. ۰/۲۵ صفحه ۱۱ کتاب					۱/۵	
۴	$\begin{cases} a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3 \end{cases} \cdot 5 \Rightarrow \begin{cases} 5a = 30q + 10 \\ 5a = 30q' + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$ ۰/۵ $\Rightarrow a = 30r + 27$ ۰/۵ صفحه ۱۶ کتاب					۱/۵	
۵	$\underbrace{27 \equiv 1}_{(0/5)} \Rightarrow \underbrace{(27)^7 \equiv 1^7}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{(27)^7 + 19 \equiv 1^7 + 19 = 20}_{(0/25)} \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 7$ ۰/۵ صفحه ۲۱ کتاب					۱/۵	
۶	$2x + 5y = 29 \cdot 5 \Rightarrow 2x \equiv 29 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow 2x \equiv 4 \cdot 5 \Rightarrow x = 5k + 2$ ۰/۵ $y = -2k + 5$ ۰/۲۵ صفحه ۲۷ کتاب					۱/۵	
۷	الف) رسم شکل (۱ نمره) ب) $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ۰/۵ ج) b, a, e, f, c, d ۰/۵ صفحه ۳۶ و ۳۹ کتاب					۲	

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه																				
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۶/۴																					
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۸			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																					
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره																				
۸	<div>الف) ۰/۵ </div> <div>ب) ۰/۵ </div> <div>صفحه ۴۲ کتاب</div>			۱																				
۹	<div>الف) ۰/۵</div> <div>ب) ۰/۵ {a,d,g}</div> <div>ج) ۰/۵ {a,d,e,h}</div> <div>صفحه ۵۴ کتاب</div> <div>لطفاً به پاسخ های دیگر برای قسمت های ب و ج نمره تعلق گیرد.</div>			۱/۵																				
۱۰	<div>یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال به صورت {a,h,f,b} است. ۰/۵</div> <div>اکنون با حذف راس a از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال به دست می آید. ۰/۵</div> <div>صفحه ۴۷ کتاب</div>			۱																				
۱۱	<div>الف) ۰/۵ ۴!×۶!</div> <div>ب) ۰/۵ ۵!×۴!</div> <div>ج) ۰/۵ ۳!×۷!</div> <div>صفحه ۷۲ کتاب</div>			۱/۵																				
۱۲	<div>۰/۲۵ $x_1 + x_r + x_p + x_p + x_d + x_f = 12 \rightarrow y_1 + 3 + x_r + x_r + x_f + y_d + 4 + x_f = 12$</div> <div>۰/۲۵ $y_1 + x_r + x_r + x_f + y_d + x_f = 5$</div> <div>۰/۵ $\xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{5+6-1}{6-1}$</div> <div>صفحه ۷۲ کتاب</div>			۱																				
۱۳	<div>۱ ۲ ۳ ۴</div> <div><table><tr><td>C_۱</td><td>T_۱</td><td>T_r</td><td>T_p</td><td>T_f</td></tr><tr><td>C_r</td><td>T_f</td><td>T_۱</td><td>T_p</td><td>T_r</td></tr><tr><td>C_p</td><td>T_r</td><td>T_f</td><td>T_۱</td><td>T_p</td></tr><tr><td>C_f</td><td>T_p</td><td>T_r</td><td>T_f</td><td>T_۱</td></tr></table></div> <div>صفحه ۷۳ (این جدول یکی از پاسخ های ممکن است، لطفاً به پاسخ های درست دیگر نمره تعلق گیرد)</div>			C _۱	T _۱	T _r	T _p	T _f	C _r	T _f	T _۱	T _p	T _r	C _p	T _r	T _f	T _۱	T _p	C _f	T _p	T _r	T _f	T _۱	۱
C _۱	T _۱	T _r	T _p	T _f																				
C _r	T _f	T _۱	T _p	T _r																				
C _p	T _r	T _f	T _۱	T _p																				
C _f	T _p	T _r	T _f	T _۱																				

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۶/۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} = S - A_1 - A_2 + A_1 \cap A_2 = 350 - \left[\frac{350}{4}\right] - \left[\frac{350}{6}\right] + \left[\frac{350}{12}\right] = 234 \quad ۰/۷۵$ <p>صفحه ۸۴ کتاب</p>	۱/۵
۱۵	<p>تعداد لانه ها : ۱۲ مربع به مانند شکل ۰/۲۵</p> <p>تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه ۰/۲۵</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  </div> <p>طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می گیرند. پس:</p> $\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 4 \quad ۰/۵ \Rightarrow AB^2 < 4 \Rightarrow AB < \sqrt{4} \quad ۰/۵$ <p>صفحه ۸۵ کتاب</p>	۱/۵

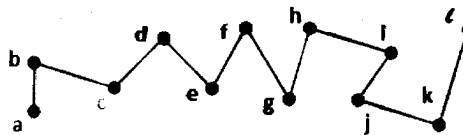
«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: ۱۰ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته : ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان : ۱۳۹۷/۱۰/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۷	مرکز سنجش آموزش و پرورش	http://aee.medu.ir	

ردیف	نمره
------	------

۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. (ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. (ج) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. (د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$)	۱
۴	اگر $a > 1$ و $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۵	پاسخ هر یک از سوالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. (الف) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a + 2 b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید. (ب) مطلوبست باقی مانده تقسیم عدد $10 \times 12 + 1000 = A$ بر عدد ۷.	۲/۲۵
۶	معادله همنهشتی $3x \equiv 13$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
۷	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. (ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. (ج) درجه رأس a در گراف G را تعیین کنید. (د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟ (ه) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.	۱/۵
۸	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۹	گراف G با مجموعه رأسهای $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ج) پاسخ دهید. (الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید. (ب) اندازه گراف را مشخص کنید. (ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	۱

ادامه سوالات در صفحه دوم

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		تعداد صفحه: ۲		ساعت شروع: ۱۰ صبح	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته: ریاضی فیزیک		تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۷				مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir			
ردیف		نمره					
۱۰	گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.						
۱۱	<p>گراف (P_{11}) در شکل مقابل رسم شده است.</p>  <p>الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید.</p> <p>ب) یک مجموعه احاطه گر مینمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>						
۱۲	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمايز) از A و سه رقم (متمايز) از B باشد؟						
۱۳	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟						
۱۴	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.						
۱۵	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود)						
۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)						
جمع نمره		۲۰					
"موفق باشید"							

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
بایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸			
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷				مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						
۱	الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵) (صفحات: ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)						
۲	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. (۰/۲۵) (صفحه: ۸)						
۳	$\underbrace{2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2)}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ ۱ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$, $(x-y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) (صفحه: ۸)						
۴	۱ $\begin{aligned} a \mid 9k+4 &\Rightarrow a \mid 45k+40 \quad (۰/۲۵) \\ a \mid 5k+3 &\Rightarrow a \mid 45k+27 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \Rightarrow a \mid 13 \quad (۰/۲۵) \xRightarrow{a>1} a=13 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۱۶)						
۵	الف) a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b \mid a+2$ ، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵) می دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵) $a^2 + b^2 + 3 = (8m+1) + (8n+1) + 3 = 8(m+n) + 5 \Rightarrow r=5 \quad (۰/۲۵)$ ۱ $1000 \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \pmod{13} \Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow r=5 \quad (۰/۲۵)$ ب) (صفحات: ۱۶ و ۲۱)						
۶	۱ $3x \equiv 13 \pmod{13} \Rightarrow 3x \equiv 6 \pmod{13} \xRightarrow{(3,13)=1} x \equiv 2 \pmod{13} \Rightarrow x = 13k + 2 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۲۵)						

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس:		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸			
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷				مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۷	<p>الف) $abgc$ (۰/۲۵) ب) $bcdgb$ (۰/۲۵) ج) $\deg_G(a) = 5$ (۰/۲۵)</p> <p>د) خیر - چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. (۰/۵)</p> <p>هـ) $a \cdot b \cdot c$ (۰/۲۵) $f \cdot g$</p> <p>(صفحات: ۳۶ و ۳۸ و ۳۹)</p>						۱/۵
۸	<p>فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:</p> $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v) \quad (۰/۲۵)$ <p>از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج (۰/۲۵)</p> <p>و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است. (۰/۲۵) (صفحه: ۴۰)</p>						۱
۹	<p>الف) $N_G(d) = \{b, e\}$ (۰/۵) ب) $q = 6$ (۰/۲۵) ج) مجموع درجات رئوس $= 12$ (۰/۲۵)</p> <p>(صفحه: ۴۱)</p>						۱
۱۰	<p>$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36$ (۰/۲۵) (صفحه: ۴۲)</p> <p>$\Rightarrow p = 9$ (۰/۲۵) , $\Delta(G) = p-1 = 8$ (۰/۲۵)</p>						۱
۱۱	<p>الف) $\{b, e, h, k\}$ (۰/۵) ب) $\{a, c, e, g, i, k\}$ (۰/۵) (صفحه: ۵۴)</p>						۱
۱۲	<p>$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times \frac{5!}{2} = 7200$ (۰/۲۵) (صفحه: ۷۲)</p> <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>						۱
۱۳	<p>$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ (۰/۲۵) $x_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ (۰/۵) (صفحه: ۷۳)</p>						۱

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف																											
۱/۵	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> ، <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> ⇒ <table border="1" style="margin: 5px;"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) </div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">(صفحه: ۷۳)</div>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱۴
۱	۳	۲																											
۳	۲	۱																											
۲	۱	۳																											
۲	۱	۳																											
۳	۲	۱																											
۱	۳	۲																											
۱۲	۳۱	۲۳																											
۳۳	۲۲	۱۱																											
۲۱	۱۳	۳۲																											
۲	<p>تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ۳ عضوی مانند B.</p> <p>$A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ (۰/۲۵)</p> <p>$S = B ^{ A } = 3^4 = 81$ (۰/۲۵), $A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16$ (۰/۲۵)</p> <p>$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ (۰/۲۵), $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ (۰/۲۵),</p> <p>$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) </div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">(صفحات: ۷۸ و ۷۹)</div>	۱۵																											
۱/۵	<p>$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19$ (۰/۵)</p> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. $n = 365$ (۰/۵)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $k n + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$ (۰/۵)</p> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">(صفحه: ۸۴)</div>	۱۶																											

«مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های دیگر بارم را به تناسب تقسیم نمایند.»