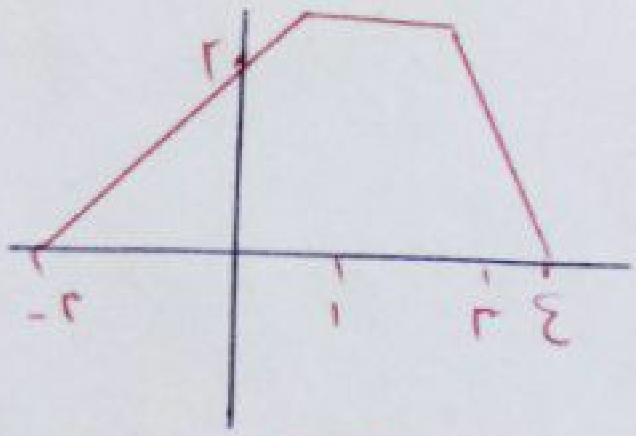
درس ۱ تبدیل نمودار تابع: در سال‌های گذشته خواندید که برای رسم $f(x\pm a)$ باید انتقال طول انجام دهیم. به عنوان مثال برای رسم $f(x+2)$ باید تابع $f(x)$، ۲ واحد به سمت راست و برای رسم $f(x-4)$، $f(x)$ ۴ واحد به چپ ببرید.

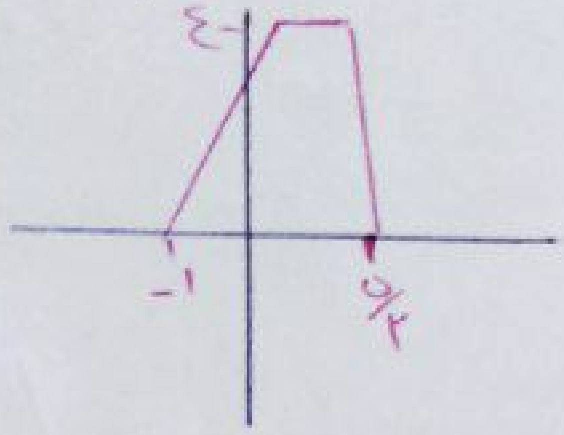
شکل ← تابع $f(x)$ رسم شده است. نمودار $f(2x-1)+1$ را رسم کنید.



حل: می‌دانیم دامنه تابع $f(x)$ به صورت $[-2,4]$ است پس:

$-2\le 2x-1\le 4 \longrightarrow -1\le x\le \frac{5}{2}$

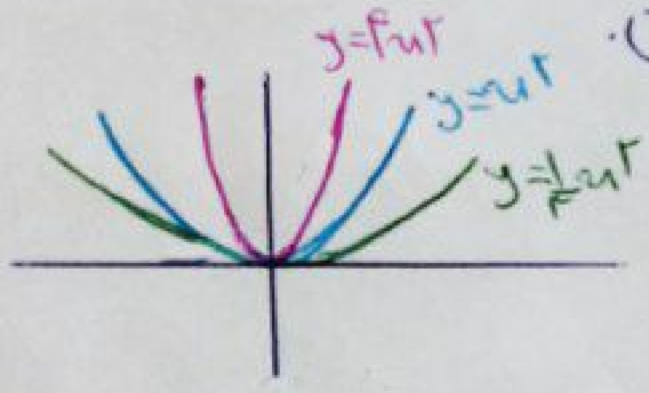
برد تابع نیز یک واحد به بالا می‌رود یعنی $[0,3]\to[1,4]$



نکته: نمودار $f(-x)$ قرینه تابع $f(x)$ نسبت به محور yها است.
نمودار تابع $-f(x)$ قرینه تابع نسبت به محور xها است.

انبساط و انقباض محوری

★ برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل مقابل نمودار تابع $y=kf(x)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.



★ اگر $|k|>1$ باشد، نمودارهای $y=kf(x)$ را انبساط محوری نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<|k|<1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض محوری نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

اگر عرض نقاط $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به دست می‌آید. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها است.

دقت کنید در مورد انبساط و انقباض محوری که در چه نقطه‌ای باید اعمال کنیم. انبساط با ضریب ۲ یعنی کل تابع $\times 2$

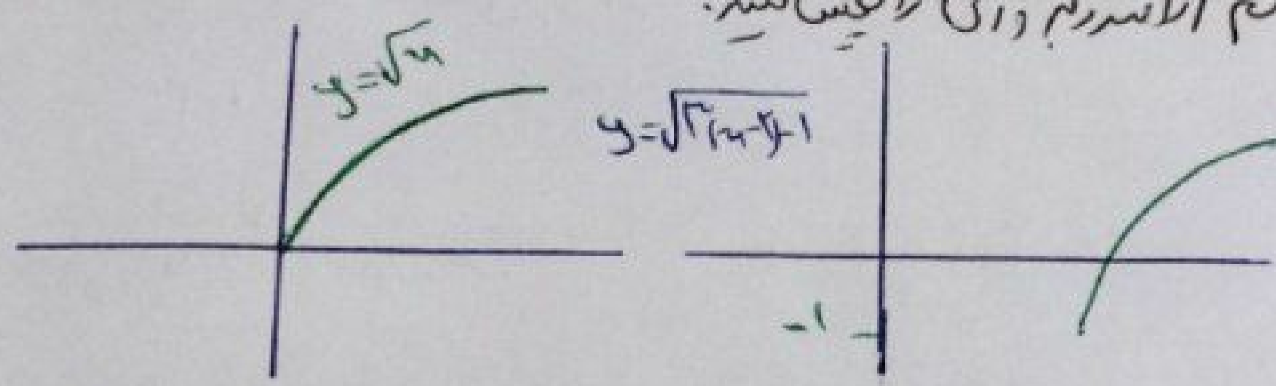
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها است.

مثال ← نمودار $y=\sqrt{3x-6}-1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



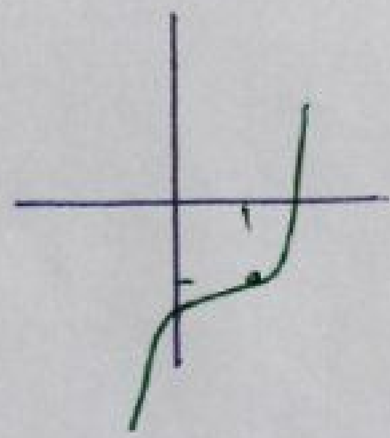
دامنه ← $[2,+\infty)$

برد ← $[-1,+\infty)$

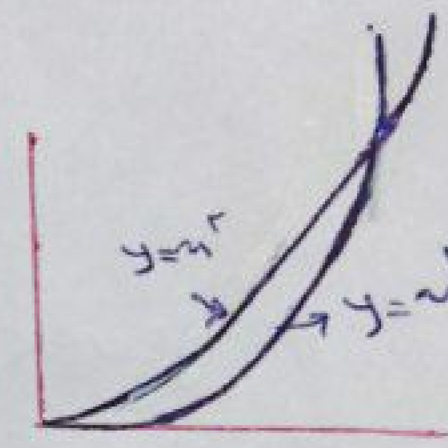
نکته: نمودار تابع $y=x^2$ و $y=x^3$ دانستن الزامی است باید بدانید.

مثال ← نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x-2$ را رسم کنید.

$y=(x-1)^3-1$



این نمودار کتاب درسی است.
در بازه‌ی $[0,1]$ نمودار $y=x^2$ بالاتر از $y=x^3$ قرار می‌گیرد.

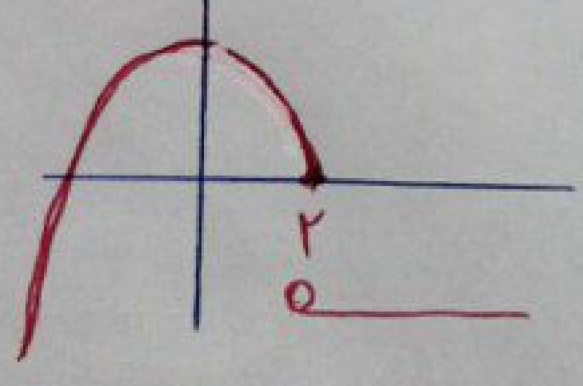


توابع صعودی و توابع نزولی

تعریف: اگر $a<b$ بوده و $f(a)<f(b)$ باشد f اکیداً صعودی است.
اگر $a<b$ بوده و $f(a)\leq f(b)$ باشد f صعودی است.

و بالعکس: اگر $a<b$ ← $f(a)>f(b)$ اکیداً نزولی است.
اگر $a<b$ ← $f(a)\geq f(b)$ ، f نزولی است.

مثال ← نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & x\leq 2\\ -1 & x>2\end{cases}$$
را رسم کرده، تعیین کنید در چه بازه‌ای صعودی در چه بازه‌ای نزولی است؟!

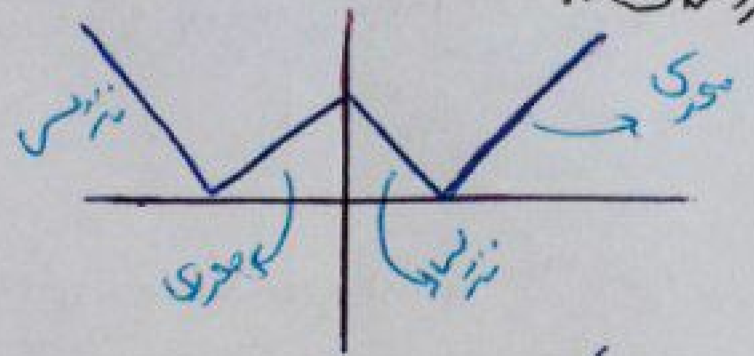


نزولی اکیداً ← $[0,2]$ اکیداً صعودی ← $(-\infty,0]$

صعودی / نزولی ← $(2,+\infty)$ نزولی ← $(0,+\infty)$

چند نکته: ① ضابطه‌ی $y=(x^2-1)$ ، $(x+2)^2$ ضابطه‌ی درجه $n=2\times2+1$ می‌باشد.
② اگر در بازه‌ای تابع صعودی باشد ممکن است اکیداً صعودی نباشد ولی اگر اکیداً صعودی باشد صعودی هم است.
③ تابع ثابت هم صعودی هم نزولی با یک نقطه بحرانی دانسته هم می‌باشد.
④ اگر $f(x)$ صعودی باشد $-f(x)$ نزولی است. اگر f نزولی باشد $\frac{1}{f}$ صعودی است.

مثال ← نمودار $y=||x|-2|$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟!



قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها:

برای پیدا کردن باقی‌مانده تابع $f(x)$ بر $x-a$ کافی است $P(a)$ را محاسبه کنید.

چندجمله‌ای x^6-1 را بر عامل $x-1$ تجزیه کنید. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

مثال ← a و b را طوری تعیین کنید تا $p(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر و بر $x+2$ باقی‌مانده ۲ به‌دهد.

$$P(1)=0 \rightarrow 1+a+b+1=0 \quad \boxed{a+b=-2}$$

$$P(-2)=2 \rightarrow -8+4a-2b+1=2 \rightarrow \begin{cases} 4a-2b=9 \\ 2a+2b=-4 \end{cases} \quad 6a=5 \quad \boxed{a=\frac{5}{6}}$$

$$b=-2-\frac{5}{6} \quad \boxed{b=-\frac{17}{6}}$$

مثال ← چندجمله‌ای $f(x)=x^2+ax-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده $f(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟!

$$f(-1)=0 \rightarrow +1-a-3=0 \quad \boxed{a=-2} \qquad f(2)=4-4-3=-3$$

مثال ← در معادله $g(x+1) \leq g(2x-3)$ صعودی چیست: (انجمن کنکوریسا)

$a>b \rightarrow f(a)>f(b)$ $\quad (x+1) \leq 2x-3$

$\boxed{x \geq 4}$

چون g رادیکالی اگر صعودی است به

$x \geq -1$

$x \geq \frac{3}{2}$ $\xrightarrow{\cap} [4,+\infty)$

نکته: اگر در عبارت x^n+a^n، n فرد باشد بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

در عبارت x^n+a^n اگر n زوج باشد بر $x+a$ و $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

در عبارت x^n-a^n اگر n فرد باشد بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

در عبارت x^n-a^n اگر n زوج باشد بر $x-a$ و $x+a$ بخش‌پذیر است.

توابع متناوب. تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$. کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب می‌گوییم.

نکته: در تابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ و $\max$ برابر $|a|+c$ و $\min$ برابر $-|a|+c$ است.

در تابع $y=\tan ax$ دوره تناوب $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد.

مثال ← دوره تناوب، max و min تابع $y=\sqrt{5}-\pi\cos\frac{1}{3}x$ چقدر است؟!

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$$

$max=\sqrt{5}+\pi \qquad min=\sqrt{5}-\pi$

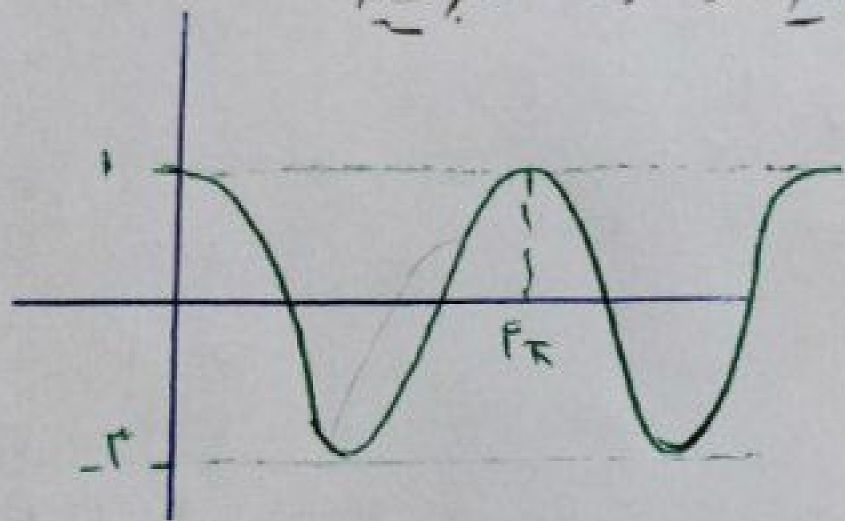
مثال ← تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ بنویسید که دوره تناوب آن ۴ و max و min آن به ترتیب ۵ و ۳- باشد.

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4=\frac{2\pi}{|b|}-|b|=\frac{2\pi}{4}$$

$$|a|+c=5$$
$$-|a|+c=-3 \longrightarrow 2c=2 \rightarrow \boxed{c=1}$$
$$|a|=4 \rightarrow \boxed{a=\pm 4}$$

$y=4\sin\frac{2\pi}{4}x+1$ یا $-4\sin\frac{2\pi}{4}x+1$

مثال ← با توجه به نمودار مقابل $y=a\cos bx+c$ مقادیر c، b و a را بنویسید.



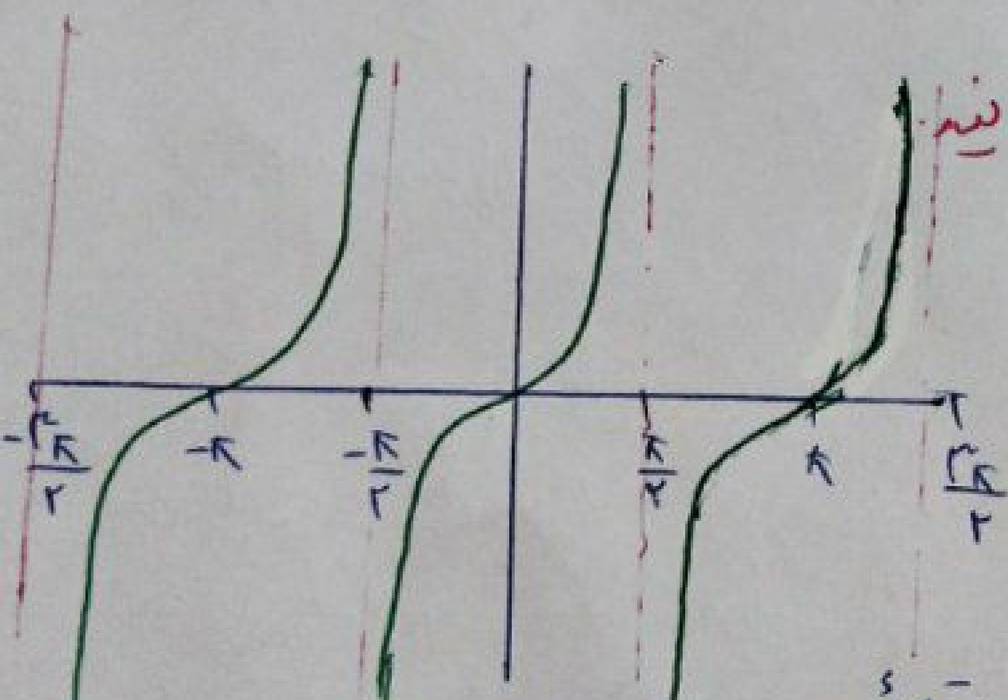
$$T=4\pi \longrightarrow \frac{2\pi}{b}=4\pi \quad \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

$$a+c=1$$
$$-a+c=-3 \longrightarrow \boxed{c=-1} \quad \boxed{a=2}$$

$$y=2\cos\frac{1}{2}x-1$$

نکته مهم: دامنه تابع $y=\tan ax$ به صورت زیر است.

$$ax=k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x\neq\frac{k\pi}{a}+\frac{k\pi}{2a} \qquad D=R-\left\{\frac{k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}\right\}$$



نمودار: نمودار $\tan x$ را مشاهده می‌کنید. به نکات زیر دقت کنید.

① دامنه تابع $R-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ است.

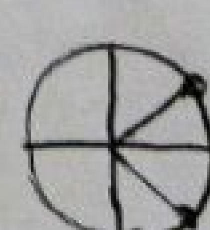
② تابع در بین مجانب‌های قائم صعودی اکیداست مثلاً $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ صعودیست.

③ دوره تناوب π می‌باشد ($\frac{\pi}{|\text{ضریب}|}$)

④ $\tan$ در دامنه‌اش صعودی نیست به دلیل وجود مجانب‌های قائم.

معادلات مثلثاتی

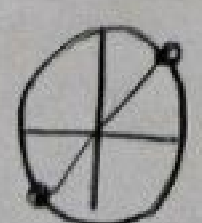
فرم کلی ← $\cos x=\cos a \qquad \sin x=\sin a \qquad \tan x=\tan a$



$x=2k\pi\pm a$

$x=2k\pi+a$

$x=2k\pi+\pi-a$



$x=k\pi+a$

مثال: معادلات مثلثاتی را حل کنید و جواب کلی را پیدا کنید.

$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ $\quad \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{12}}$

$2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\quad \boxed{x = k\pi + \frac{5\pi}{12}}$

$\cos 3x - \cos x = 0$ $\quad \cos 3x = \cos x$ $\quad 3x = 2k\pi + x \longrightarrow \boxed{x = k\pi}$

$3x = 2k\pi - x \longrightarrow 4x = 2k\pi \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$

$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ $\quad \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}}$

$3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}}$

$\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ $\quad 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \longrightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\quad \cos x = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\sin 3x = \sin 2x$

$3x = 2k\pi + 2x \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$ $\quad 3x = 2k\pi + \pi - 2x \longrightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}$

$\sin x + \cos x = 1$ $\quad \sin x = 1 - \cos x$ $\quad \sin^2 x = 1 + \cos^2 x - 2\cos x \longrightarrow 1 - \cos^2 x = \cos^2 x - 2\cos x + 1$

$[0, 2\pi]$ $\quad 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \longrightarrow \cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2}\checkmark, \frac{3\pi}{2} \times$ $\quad x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

$\cos x = 1$ $\quad x = 0, 2\pi \checkmark$

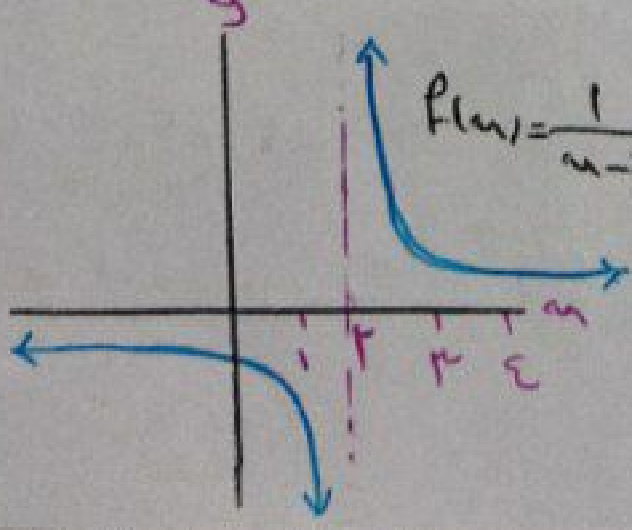
$\tan x = \tan 5x$ $\quad 5x = k\pi + x \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{4}} \longrightarrow k \neq 4n + 2$

مثال: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه ۲ ضلع آن ۲، ۶ cm باشد. آنگاه ضلع سوم

با این خاصیت چند مثلث می‌توان ساخت؟!

$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ $\quad \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\theta = 3 \longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

۲ مثلث



حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

مثال ← حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{[x]+1}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = \frac{+}{\infty} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x-x^3}{3x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{3} = +\infty$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \frac{+}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3-0 = 3$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{2-\cos 2x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

مثال ← مجانب های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{4x^2+1}{2x^2+x}$ را به دست آورید.

در مجانب افقی $x\to\pm\infty$ را به دست آورید. در مجانب قائم ریشه های مخرج را حساب کنید دقت کنید ریشه صورت نباشد ✗

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+1}{2x^2+x} = 2 \quad \boxed{y=2}$ افقی

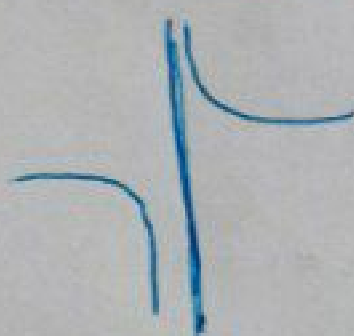
$2x^2+x=0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=-\frac{1}{2}} \rightarrow$ قائم

مثال ← نمودار $y=\frac{1}{x-|x|}$ و $y=\frac{x+1}{x^3+x}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه است.

$x^3+x=0 \quad x(x^2+1)=0 \quad \boxed{x=0}$

$x\to 0^+ \quad \frac{1}{0^+}=+\infty$

$x\to 0^- \quad \frac{1}{0^-}=-\infty$



$y=\frac{1}{x-|x|}$ دامنه $\boxed{x<0}$

$x\to 0^+$ ت.ن

$x\to 0^- \quad \frac{1}{0^-}=-\infty$

مثال ← آیا $x=2$ مجانب قائم $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ می باشد؟

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-\cancel{2})(x-1)}{(x-\cancel{2})(x+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

خیر چون حد ∞ نشد.

مشتق تعریف: $f'(a)=\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

در مشتق‌گیری ابتدا به پیوستگی دقت کنید سپس مشتق چپ و راست را بررسی کنید.

مثال ← مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|-0}{x-2} = 1$

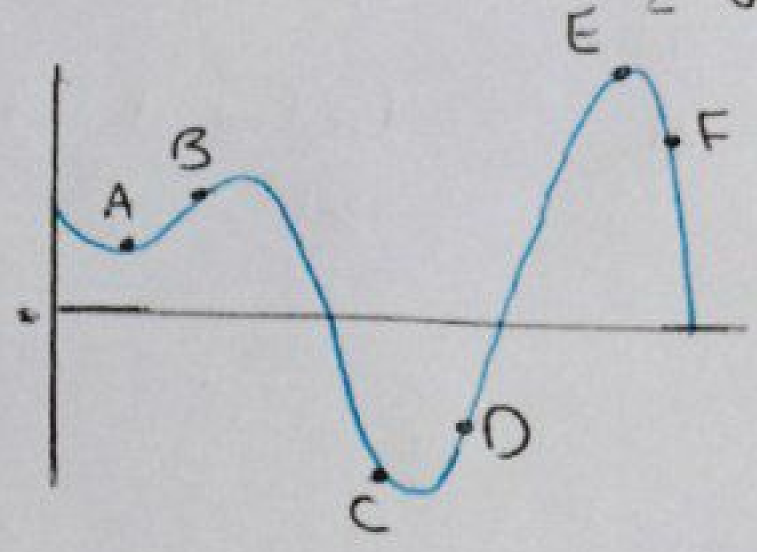
$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|-0}{x-2} = -1$

در $x=2$ پیوسته است چون ← $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$

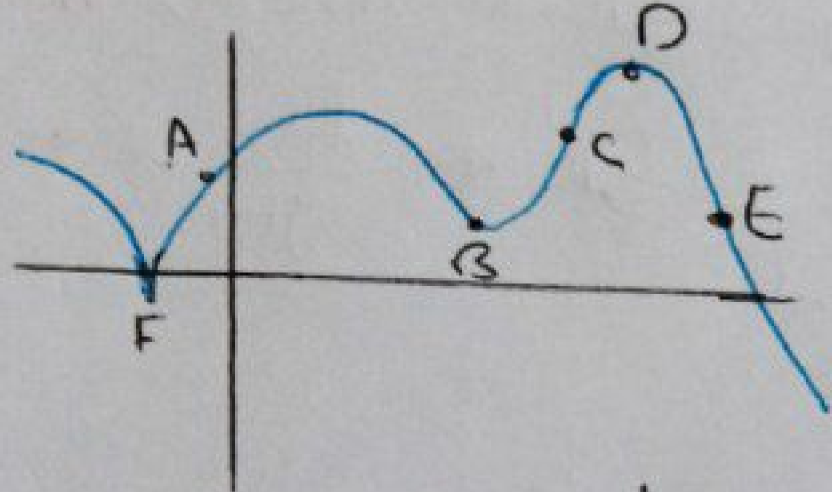
مشتق چپ و راست نابرابر ✗

مثال ← نمودار داده شده، سری نقطه‌ی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول تطبیق کنید.

نقطه	شیب
F	-3
C	-1
E	0
A	$\frac{1}{2}$
B	1
D	2



مثال ← با توجه به نمودار به سوالات جواب دهید:



نقطه ای با شیب مثبت: C

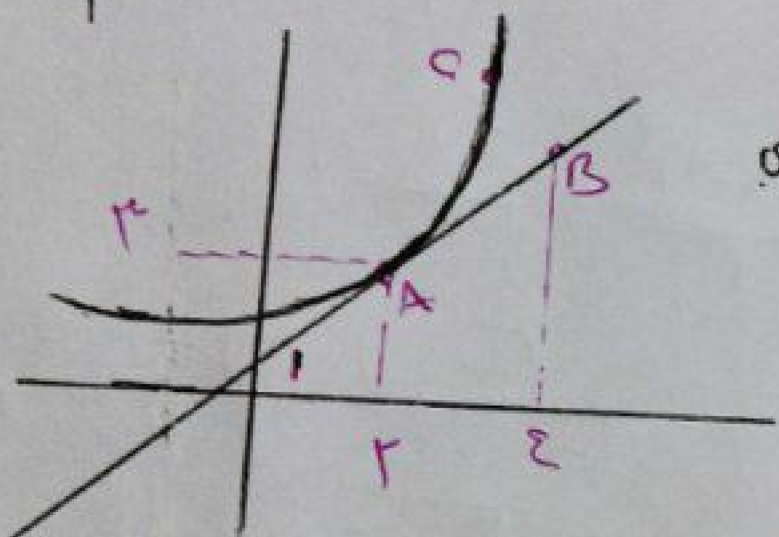
کمترین شیب بین نقاط: E

نقطه‌های ماکزیمم تابع: B ـ D

نقطه مشتق ناپذیر: F

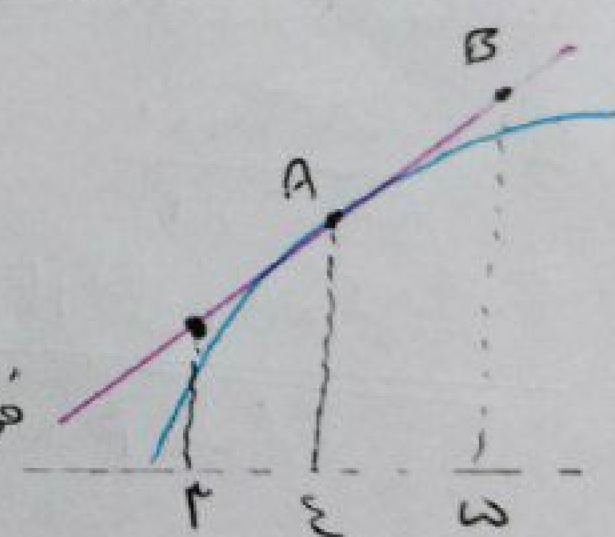
بیشترین شیب بین نقاط: C

مثال ← هر تابع در نقطه مماس را رسم کرده‌ایم. مشتق تابع f در این نقطه مورد خط مماس برابر چیست؟



$$m_{AB} = \frac{3-1}{2-0} = 1 \qquad f'(A) = f'(2) = 1 \qquad y = x+1$$

مثال ← برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4)=115$ و $f(4)=25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.



$$f'(4) = \frac{f(B)-f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(5)-25}{5-4} = 115$$

$$f'(4) = \frac{f(A)-f(C)}{x_A - x_C} = \frac{25-f(C)}{1} = 1.5$$

$$f(C) = 23.5$$

مثال ← اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ ، $g(2)=8$ ، $g'(2)=-4$ مقدار $(f+g)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را بدست آوریم.

$$\frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)} = \frac{5\times 8 - (-4)3}{64} = \frac{40+18}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

مثال ← مشتق‌پذیری تابع زیر را در نقطه $x=1$ بررسی کنید:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$$

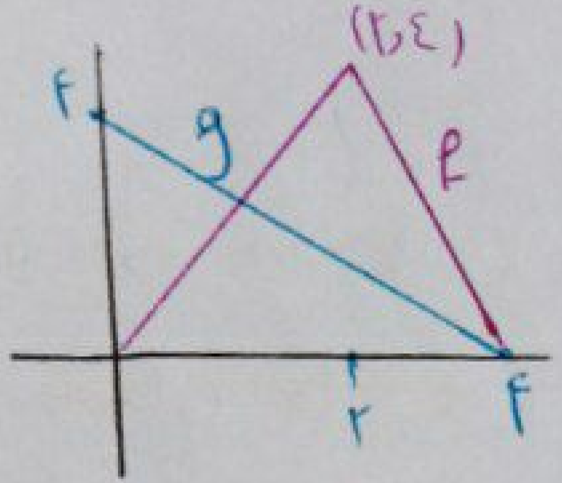
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\quad f'(x)\begin{cases} 2x & x\geq 1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$

در نقطه X نیم‌مشتقات دارد.

مثال ← نمودار تابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)g(x)$ مطلوب است: $h'(1)$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است: $k'(2)$



الف) $f(x)=2x \quad g(x)=4-x \quad f.g=2x(4-x)=8x-2x^2$

$(f.g)'=8-4x=8-4=4$

ب) $f(x)=-2x+8 \quad g(x)=4-x \quad \frac{8-2x}{4-x}=2 \quad k'(2)=0$

روش ۲ → $\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{g^2(2)} = \frac{-2\times1-(-1)2}{1} = \frac{-2+2}{1}=0$

مثال ← مشتق توابع داده شده را بدست آورید

الف) $f(x)=(2x^2-4)(2x-5)^3$

$4x(2x-5)^3+3(2x-5)^2\,2(2x^2-4)$

ب) $f(x)=\sqrt{3x+2}\,(x^2+1)$

$\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2+1)+2x\sqrt{3x+2}$

ب) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{-2x+2}$

$\frac{(2x-2)(-2x+2)-(-2)(x^2-2x+1)}{(-2x+2)^2}$

ت) $f(x)=\frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$\frac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{x}$

مثال ← مشتق توابع مثلثاتی زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

$2\sin x\cos x-2\sin x\cos x$

ب) $f(x)=\tan^2 x-2\cos x$

$2\tan x(1+\tan^2 x)+2\sin x$

ب) $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

ت) $f(x)=\sin x\cos^2 x$

$\cos x\cos^2 x-2\sin^2 x\sin x$

مثال ← معادله خط مماس بر منحنی $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ در $x=2$ واقع بر منحنی را بنویسید.

$y'=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-8}{9}$ $\quad \left|\begin{matrix}2\\ \frac{5}{3}\end{matrix}\right.$ $\quad y=\frac{-8}{9}x+\frac{16}{9}+\frac{5}{3}$

آهنگ متوسط تغییر، آهنگ لحظه‌ای تغییر

از فرمول $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ به دست می‌آید.

مثال ← معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+1$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند.

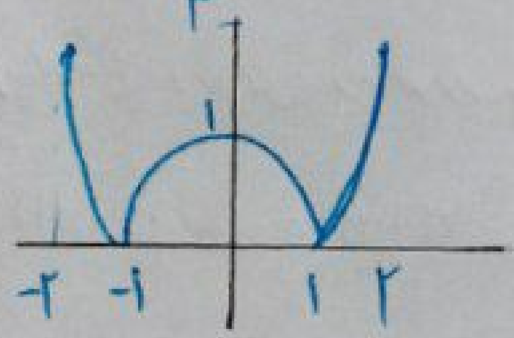
$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{21-1}{5}=4$ $\quad 2t-1=4$ $\quad t=\frac{5}{2}$

مثال ← نوزادی پس از تولد با گذشت t هفته دارای وزن $m(t)=\sqrt{t}+t^2$ کیلوگرم است. آهنگ رشد وزن نوزاد پس از تولد در لحظه $t=9$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2t=\frac{1}{6}+18=18\frac{1}{6}$

کاربردهای مشتق

مثال ← مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^2-1|$ را روی بازه $[-2,2]$ پیدا کنید.



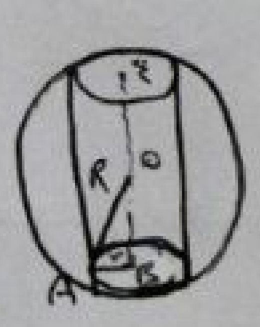
به کمک رسم نمودار!

$x=1$, $x=-1$ min نسبی و مطلق

$x=0$ max نسبی

$x=\pm2$ max مطلق

مثال ← درون کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای رسم کرده‌ایم. حداکثر حجم استوانه چقدر است؟



$V=\pi r^2h$ $\quad R^2=r^2+\frac{h^2}{4}\longrightarrow r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$

$V=\pi(R^2h-\frac{h^3}{4})$ $\quad R^2-\frac{3h^2}{4}=0$ $\quad \boxed{h=\frac{2}{\sqrt{3}}R}$ $\quad r^2=R^2-\frac{4}{3}\frac{R^2}{4}$ $\quad \boxed{r=\sqrt{\frac{2}{3}}R}$

$V=\pi\times\frac{2}{3}R^2\times\frac{2}{\sqrt{3}}R=\pi R^3\frac{4}{3\sqrt{3}}$

تشخیص سوی تقعر نمودار یک تابع

مثال ← تابع $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است:

$y'=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$-$	0	$+$
نزولی		صعودی

مثال ← a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=x^3+ax+b$ در $(1,2)$ اکسترمم داشته باشد.

$f(1)=2 \longrightarrow 1+a+b=2 \quad a+b=1$

$f'(1)=0 \quad 3x^2+a=0 \longrightarrow 3+a=0 \quad \boxed{a=-3} \quad \boxed{b=4}$

* ← برای پیدا کردن اکسترمم مطلق باید نقاط بحرانی را پیدا کنیم:

۱- مشتق $=0$ ۲- مشتق وجود ندارد   ۳- اول و آخر بازه در صورت بسته بودن

مثال ← max و min مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ در بازه $[-1,2]$ تعیین کنید.

$f'(x)=0 \longrightarrow 6x^2+6x-12=0 \quad \boxed{x=1} \quad x=-2$ ✗ در بازه نیست $\quad \boxed{x=-1} \quad \boxed{x=2}$

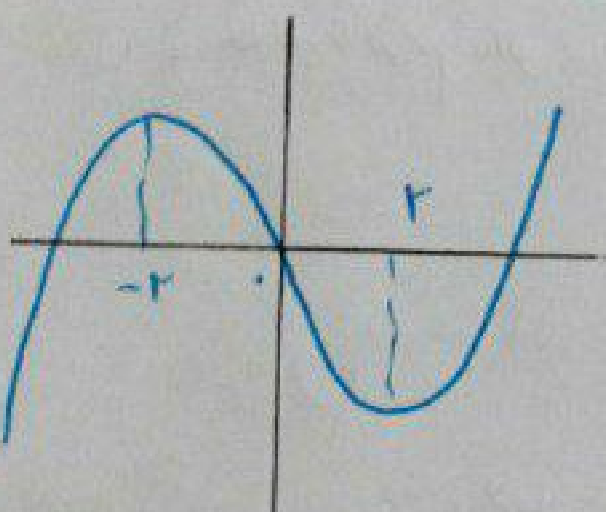
$\begin{array}{c|c} 1 & -6 \end{array}$ مطلق min

$\begin{array}{c|c} -1 & 14 \end{array}$ مطلق max

$\begin{array}{c|c} 2 & 5 \end{array}$

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن:

نقطه عطف نقطه‌ای است که مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد و جهت تقعر تابع عوض می‌شود.



مثال ← اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه ۳ با ضابطه $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل روبرو رسم شده است a، b و c را پیدا کنید.

$y'=3x^2+2ax+b \quad x=\pm 2 \longrightarrow 12+b=0 \longrightarrow \boxed{b=-12}$

$y''=6x+2a=0 \longrightarrow \boxed{a=0} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \quad \boxed{c=0}$

مثال ← جهت تقعر و نقطه عطف توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y=x^3-2x-1 \qquad y'=3x^2-2$

$y''=6x=0 \quad \boxed{x=0}$ نقطه عطف

		0	
y''	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

ب) $y=\frac{x-1}{2x+1} \qquad y'=\frac{-3}{(2x+1)^2} \longrightarrow y''=\frac{6}{(2x+1)^4}$

		$-\frac{1}{2}$	
	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

در $(-\frac{1}{2},+\infty)$ تقعر رو به بالا است در $(-\infty,-\frac{1}{2})$ تقعر رو به پایین ولی نقطه عطف ندارد

چون $x=-\frac{1}{2}$ در دامنه تابع نیست.

مثال ← جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x+4}$ را رسم کنید.

$x=-4$ مجانب قائم

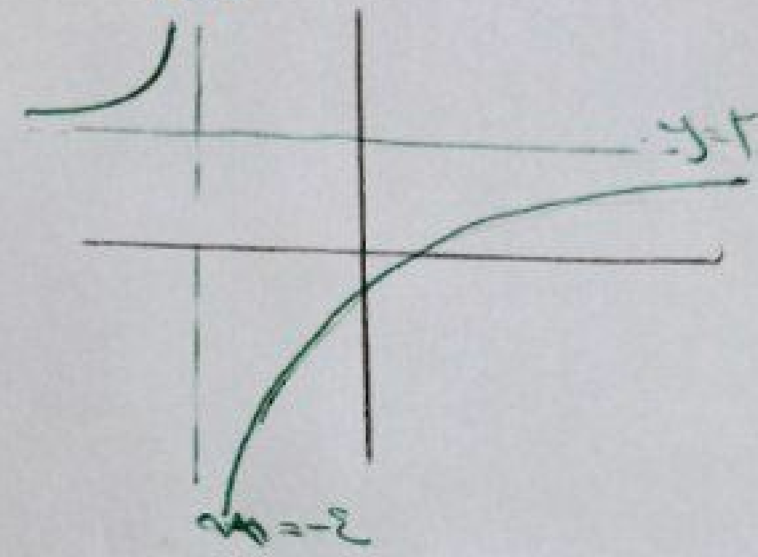
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+4}=2$

$y=2$ مجانب افقی

$y'=\frac{2(x+4)-1(2x-1)}{(x+4)^2}=\frac{9}{(x+4)^2}>0$

$y''=\frac{-18}{x+4}$ $x=-4$

	$-\infty$	-4	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y''	$+\cup$		$-\cap$
	$2 \nearrow \infty$		$\infty \nearrow 2$



حل ← جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^3+3x^2-1$ را رسم کنید.

$y'=3x^2+6x=0$ $x=0$ $x=-2$

$y''=6x+6$ $x=-1$

	-2		-1	0	
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	3	1	-1