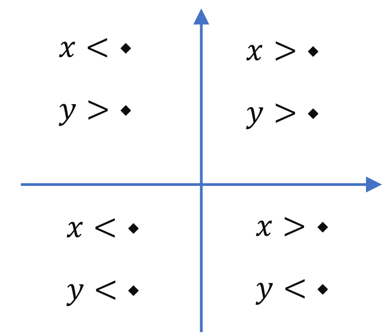
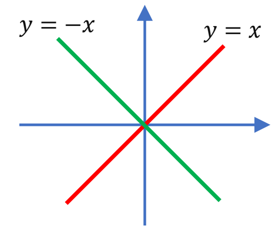
نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

علامت x و y در ناحیه های مختلف



نیمساز های ناحیه ها



نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$

نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$

خطوط افقی و عمودی

خطوط افقی ← $\boxed{y = \text{عدد}}$

خطوط عمودی ← $\boxed{x = \text{عدد}}$

محور x ها ← $\boxed{y = \text{صفر}}$

محور y ها ← $\boxed{x = \text{صفر}}$

محل برخورد با محور های مختصات

برای پیدا کردن محل برخورد با محور x ها (طول از مبدا) در معادله بجای y صفر قرار می دهیم.

برای پیدا کردن محل برخورد با محور y ها (عرض از مبدا) در معادله بجای x صفر قرار می دهیم.

محل برخورد دو منحنی

برای پیدا کردن محل برخورد دو منحنی سه راه وجود دارد:

۱ تساوی y ها $(y_۱ = y_۲)$ ۲ حل دستگاه   ۳ جانشینی

مثال: محل برخورد دو خط $y = ۳x - ۱$ و $y = ۴x - ۲$ را بیابید؟ (تساوی y ها)

$$y_۱ = y_۲ \rightarrow ۳x - ۱ = ۴x - ۲ \rightarrow x = ۱$$

سپس $x = ۱$ را دریکی از خطوط قرار میدهیم $y = ۲$، پس محل برخورد $(۱,۲)$ است.

مثال: محل برخورد دو خط $۳x + ۲y = ۱$ و $x - y = ۳$ را بیابید؟

راه ۱ (دستگاه)
$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases}$$

دستگاه را حل می کنیم، معادله پایین را در ۲ ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۱ \\ ۲x - ۲y = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله را جمع می کنیم}} ۵x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۵} \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی خطوط}}$$

$$\frac{۷}{۵} - y = ۳ \Rightarrow y = -\frac{۸}{۵} \Rightarrow (\frac{۷}{۵}, -\frac{۸}{۵})$$

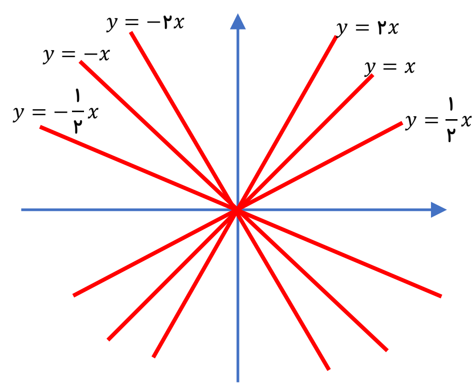
راه۲(جانشینی) x را از معادله دومی پیدا می کنیم و درمعادله اولی جایگذاری می کنیم

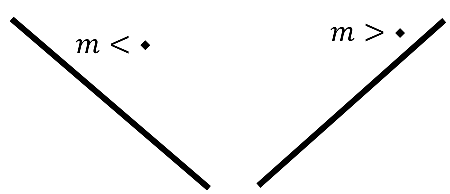
$$x - y = ۳ \Rightarrow x = y + ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اول}} ۳(y + ۳) + ۲y = ۱ \Rightarrow ۵y = -۸$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۸}{۵} \xrightarrow{\text{جایگذاری دریکی معادله ها}} x = \frac{۷}{۵} \Rightarrow (\frac{۷}{۵}, -\frac{۸}{۵})$$

خط گذرنده از مبدا (عرض از مبدا صفر)

خطوط گذرنده از مبـــــدا به صورت $y = mx$ است.





معادله خط

راه (۱) $\quad y = mx + h$

راه(۲) $\quad y - y_{\text{نقطه}} = m\left(x - x_{\text{نقطه}}\right)$

شیب خط را با m نشان می دهیم که به کمک دو نقطه قابل محاسبه است

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- h عرض از مبدا است که مستقیم در سوال داده می شود یا با جایگذاری یک نقطه در معادله می توانیم آن را بدست بیاریم.

توجه:

- دو خط موازی دارای شیب های برابرند.
- دو خط عمود بر هم شیب های قرینه معکوس دارند.

نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

مثالی از معادله خط

مثال : معادله خط گذرنده از دو نقطه (۳,۴) و (۵,۱۰) را بیابید.

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱۰-۴}{۵-۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$y-y_{\text{نقطه}}=m\left(x-x_{\text{نقطه}}\right)\rightarrow$$

$$y-۴=۳(x-۳)\rightarrow$$

$$y-۴=۳x-۹\rightarrow$$

$$\boxed{y=۳x-۵}$$

فاصله و وسط دو نقطه

فاصله دو نقطه $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$:

$$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$d=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}$$

وسط دو نقطه میانگین دو نقطه است:

$$\left(\frac{x_۲+x_۱}{۲},\frac{y_۲+y_۱}{۲}\right)$$

فاصله نقطه از خط

برای پیدا کردن فاصله نقطه از خط ابتدا کل معادله خط را به یک طرف می بریم.

فاصله نقطه $(x_۱,y_۱)$ از خط

$$ax+by+c=۰$$

از رابطه زیر بدست می آید:

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$=\frac{\text{جایگذاری نقطه در معادله}}{\sqrt{\text{فیثاغورس ضرایب}}}$$

مثالهای از فاصله

مثال: فاصله دو نقطه (۳,۴)و(۵,۱۰)را بیابید.

$$d=\sqrt{(۵-۳)^۲+(۱۰-۴)^۲}$$

$$=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=\sqrt{۴\times ۱۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

مثال:فاصله نقطه(۲,۴) از خط $۳y=۴x+۱$ کدام است؟

ابتدا معادله خط را به یک طرف می بریم:

$$۳y-۴x-۱=۰$$

$$d=\frac{|۳\times ۴-۴\times ۲-۱|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۳}{۵}$$

اتحاد مربع کامل

$$(a\pm b)^۲=a^۲\pm ۲ab+b^۲$$

$$x^۲\pm ۲x+۱=(x\pm ۱)^۲$$

$$x^۲\pm ۴x+۴=(x\pm ۲)^۲$$

$$۴x^۲+۴x+۱=(۲x+۱)^۲$$

اتحاد مزدوج

$$a^۲-b^۲=(a+b)(a-b)$$

$$x^۲-۹=(x+۳)(x-۳)$$

$$۹x^۲-۱=(۳x-۱)(۳x+۱)$$

$$x^۴-۱=(x^۲-۱)(x^۲+۱)$$

اتحاد چاق و لاغر

$$a^۳\pm b^۳=(a\pm b)(a^۲+b^۲\mp ab)$$

$$x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)$$

$$x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$$

$$x^۳-۸=(x-۱)(x^۲+۲x+۴)$$

اتحاد مکعب کامل

$$(a\pm b)^۳=a^۳\pm b^۳\pm ۳a^۲b+۳ab^۲$$

هرجا $a^۳+b^۳$ دیدید می توانید از یکی از دو اتحاد زیر کمک بگیرید:

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

خواص توان و رادیکال

در ضرب وقتی پایه ها برابرند توانها را با هم جمع می کنیم $a^n\times a^m=a^{n+m}$

در تقسیم وقتی پایه ها برابرند توانها را با منها می کنیم $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$۲^۴\times ۲^۵=۲^۹$ $\qquad$ $\frac{۲^۹}{۲^۵}=۲^۴$

در ضرب وقتی توان ها برابرند پایه ها را ضرب می کنیم $a^n\times b^n=(ab)^n$

در تقسیم وقتی توان ها برابرند پایه ها را تقسیم می کنیم $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$

$\frac{۱۰^۴}{۳^۴}=\left(\frac{۱۰}{۳}\right)^۴$ $\qquad$ $۲^۴\times ۳^۴=۶^۴$

خواص توان و رادیکال

توان های کسری را می توان تبدیل به رادیکال کرد و برعکس $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

توان های منفی به مخرج می روند $a^{-n}=\frac{۱}{a^n}$

توان های متوالی در هم ضرب می شود $(a^n)^m=a^{nm}$

$\sqrt[۳]{۳^۲}=۳^{\frac{۲}{۳}}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$ $\qquad$ $\left(۲^۳\right)^۴=۲^{۱۲}$

$\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^۳}=۲^{-۳}$ $\qquad$ $۲\sqrt{۲}=۲^۱\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$

$\sqrt[۳]{۳۲}=\sqrt[۳]{۲^۵}=۲^{\frac{۵}{۳}}$ $\qquad$ $\frac{۸}{\sqrt[۳]{۱۶}}=\frac{۲^۳}{۲^{\frac{۴}{۳}}}=۲^{۳-\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۵}{۳}}$

نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

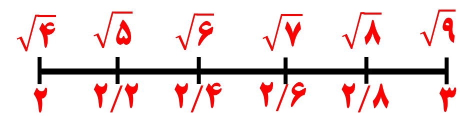
محاسبه تقریبی رادیکال فرجه دو

$$\sqrt{x} \cong \frac{x+y}{۲\sqrt{y}}$$

برای محاسبه تقریبی رادیکال x عددی نزدیک x در نظر می گیریم که رادیکال آن به سادگی قابل محاسبه باشد به نام y

$$\sqrt{۱۰} = \frac{۱۰+۹}{۲\sqrt{۹}} = \frac{۱۹}{۶} = ۳/۱۶$$

$$\sqrt{۳/۷} = \frac{۳/۷+۴}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۷/۷}{۴} = ۱/۹۲$$



دنباله حسابی که هر بار ۰/۲ اضافه می شود

قدرمطلق | ∴ |

اگر عدد مثبت داخلش برود خود آن عدد عیناً خارج می شود ولی اگر عدد منفی وارد شود قرینه آن خارج می شود.

$|\sqrt{۳}-۱| = \sqrt{۳}-۱ \qquad |-۳| = ۳$

$|x^۲+۱| = x^۲+۱$

- اگر درون رادیکال توان۲ داده شده باشیم تبدیل به قدرمطلق می شود:

$\sqrt{(x-۳)^۲} = |x-۳|$

$\sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲} = |\sqrt{۵}-۳| = ۳-\sqrt{۵}$

$$\boxed{|x| = a \overset{a\geq ۰}{\Longrightarrow} x = \pm a}$$

$|x| = ۴ \rightarrow x = \pm ۴$

$|۳x+۱| = ۲ \rightarrow ۳x+۱ = \pm ۲$

$$\begin{cases} ۳x+۱ = ۲ \rightarrow x = \frac{۱}{۳} \\ ۳x+۱ = -۲ \rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

جزءصحیح [∴]

جزءصحیح اعداد صحیح خودش است.

برای بقیه اعداد، عدد صحیح قبلش است.

$[-۵] = -۵ \qquad [۳] = ۳$

$[۳/۷] = ۳ \qquad [-۳/۷] = -۴$

$$\boxed{[x] = n \overset{n\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} n \leq x < n+۱}$$

$[x] = ۳ \rightarrow ۳ \leq x < ۴$

کارهایی که در جزءصحیح ممنوع است

$[-x] \neq -[x]$

$[۲x] \neq ۲[x]$

$[x^n] \neq [x]^n$

$[x+y] \neq [x]+[y]$

عدد صحیح اگر جمع یا منها شود از درون جزءصحیح خارج می شود

$[x+۳] = [x]+۳$

انتقال های مهم تابع $y = f(x)$

راست : x را منهای k می کنیم

$y = f(x-k)$

چپ : x را بعلاوه k می کنیم

$y = f(x+k)$

بالا : کل تابع را بعلاوه k می کنیم

$y = f(x)+k$

بالا : کل تابع را منهای k می کنیم

$y = f(x)-k$

اگر کل تابع در منفی ضرب شود نسبت به محور x ها قرینه می شود

$y = -f(x)$

اگر x در منفی ضرب شود نسبت به محور y ها قرینه می شود

$y = f(-x)$

مثالهایی از انتقال

چپ ← $(x+۲)^۲$ راست ← $(x-۲)^۲$

پایین ← $x^۲-۳$ بالا ← $x^۲+۳$

بالا ← $\sqrt{x}+۳$ چپ ← $\sqrt{x+۳}$

۴ تا بالا /۲ تا راست ← $(x-۲)^۲+۴$

۴ تا پایین /۲ تا چپ ← $(x+۲)^۲-۴$

۲ تا بالا /۱ تا راست ← $|x-۱|+۲$

۲ تا پایین /۱ تا چپ ← $\sqrt{x+۱}-۲$

نامساوی مهم قدرمطلقی

$$\boxed{\begin{cases} |x| \leq a \\ x^۲ \leq a^۲ \end{cases} \Rightarrow -a \leq x \leq a}$$

$$\boxed{\begin{cases} |x| \geq a \\ x^۲ \geq a^۲ \end{cases} \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a}$$

$x^۲ \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq x \leq ۴$

$|x| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳$

$|x| > ۲ \Rightarrow x > ۲$ یا $x < -۲$

$x^۲ > ۹ \Rightarrow x > ۳$ یا $x < -۳$

دو نامساوی عجیب

اگر K عددی مثبت باشد

$$\boxed{\frac{۱}{x} > K \Leftrightarrow ۰ < x < \frac{۱}{k}}$$

اگر K عددی منفی باشد

$$\boxed{\frac{۱}{x} < K \Leftrightarrow \frac{۱}{k} < x < ۰}$$

$\frac{۱}{x} > ۲ \rightarrow ۰ < x < \frac{۱}{۲}$

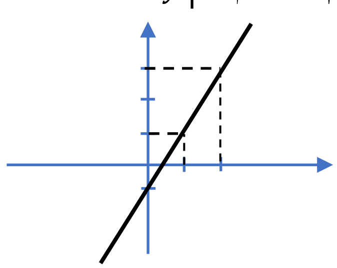
$\frac{۱}{x} < -۳ \rightarrow -\frac{۱}{۳} < x < ۰$

رسم خطوط

برای رسم خط ها یا توابع درجه یک کافی است دو نقطه در آنها قرار دهیم.

$y = ۲x - ۱$

x	۱	۲
y	۱	۳



نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

رسم سهمی به کمک راس

سهمی هایی که به صورت گسترده هستند:

$$y = ax^{۲} + bx + c$$

ابتدا راس سهمی را پیدا کنید:

$$x_S = -\frac{b}{۲a}$$

سپس x_S را در سهمی داده شده قرار دهید y_S را بیابید، پس راس سهمی (x_S, y_S) می باشد، حال به کمک یک یا دو نقطه کمکی دیگر سهمی را رسم کنید.

مثال: سهمی $y = \underbrace{۲}_{a}x^{۲} \underbrace{-۴}_{b}x + \underbrace{۱}_{c}$ را رسم کنید.

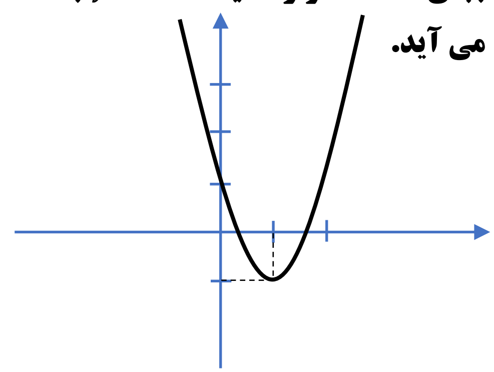
$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲ \times ۲} = ۱$$

$x_S = ۱$ را در معادله قرار می دهیم

$$y_S = ۲ \times (۱)^{۲} - ۴ \times ۱ + ۱ = -۱$$

پس راس سهمی $(۱, -۱)$ است.

برای پیدا کردن محل برخورد با محور yها بجای $x = ۰$ قرار دهید که $y = ۱$ بدست می آید.



رسم سهمی به کمک ریشه ها

برای رسم سهمی هایی که پیدا کردن ریشه های آن بسیار ساده است، ابتدا ریشه ها را پیدا کنید سپس راس سهمی را به کمک ریشه ها به صورت زیر بیابید:

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{۲} = \frac{\text{مجموع ریشه ها}}{۲}$$

سپس x_S را در سهمی داده شده قرار دهید y_S را بیابید، پس راس سهمی (x_S, y_S) می باشد، حال به کمک ریشه ها و راس سهمی را رسم می کنیم.

مثال: سهمی $y = \frac{۱}{۲}(x - ۳)(x + ۱)$ را رسم کنید.

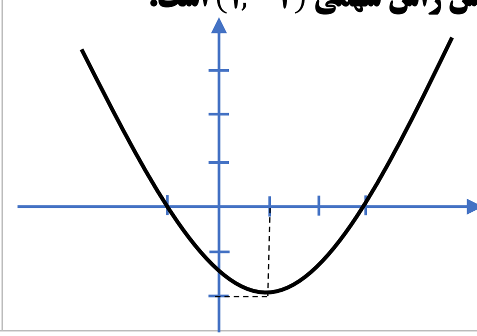
ریشه های این سهمی $x = ۳, -۱$ است.

$$x_S = \frac{-۱ + ۳}{۲} = ۱$$

$x_S = ۱$ را در معادله قرار می دهیم

$$y_S = \frac{۱}{۲}(۱ - ۳)(۱ + ۱) = -۲$$

پس راس سهمی $(۱, -۲)$ است.



رسم سهمی به کمک انتقال

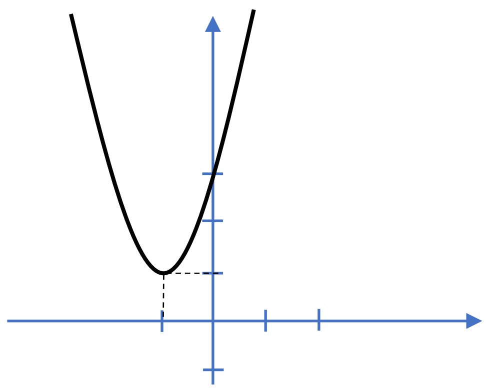
سهمی هایی که به صورت زیر هستند

$$y = A\underbrace{(x - x_S)}_{x_S \text{ ریشه اینجا}}^{۲} + \underbrace{y_S}_{y_S \text{ عدد بیرون}}$$

مثال: سهمی $y = ۲(x + ۱)^{۲} + ۱$ را رسم کنید.

راس سهمی $(-۱,۱)$ است.

برای پیدا کردن محل برخورد با محور yها بجای $x = ۰$ قرار دهید که $y = ۳$ بدست می آید.



رسم توابع چند ضابطه ای (بخش ۱)

برای رسم توابع چندضابطه ای باید حتما مرز تابع را در هر دو ضابطه قرار دهید و مشخص کنید آن نقطه توپر یا توخالی هست.

مثال: سهمی $y = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ x + ۱ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید.

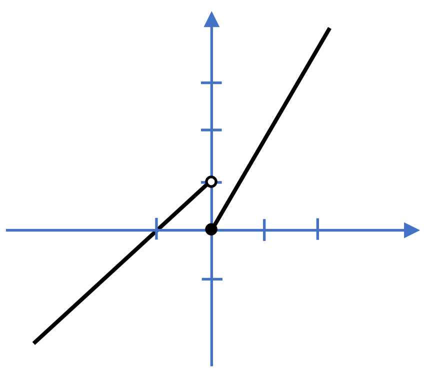
مرز این تابع $x = ۰$ است که اگر در تابع بالایی نقطه توپر است و در تابع پایینی توخالی است.

بالایی

x	۰	۱
y	۰	۲

پایینی

x	۰	-۱
y	۱	۰



نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

رسم توابع چند ضابطه ای (بخش ۲)

تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴x & x\ge ۱ \\ x^{۲}-۱ & x<۱\end{cases}$ را رسم کنید.

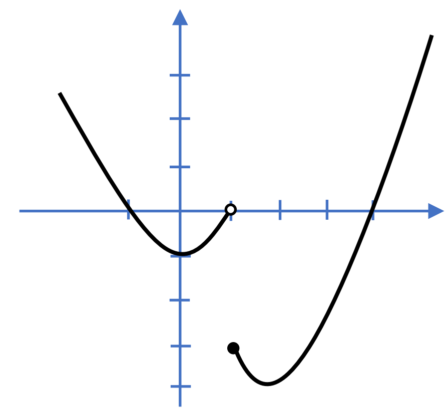
مرز این تابع $x=۱$ است که اگر در تابع بالایی نقطه توپر است و در تابع پایینی توخالی است.

بالایی : راس سهمی $(۲,-۴)$

x	۱	٤
y	-۳	۰

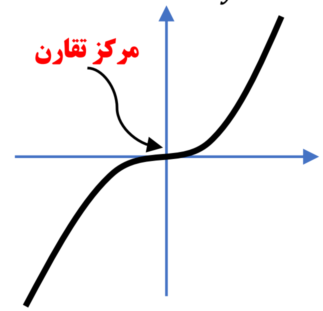
پایینی: سهمی که یک واحد پایین آمده

x	۱	-۱
y	۰	۰

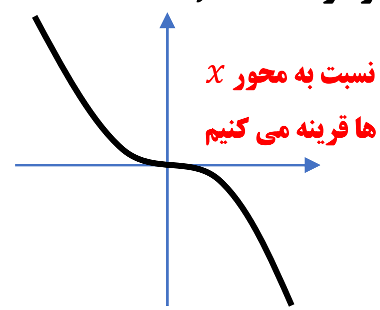


رسم درجه سوم (بخش اول)

نمودار $y=x^{۳}$



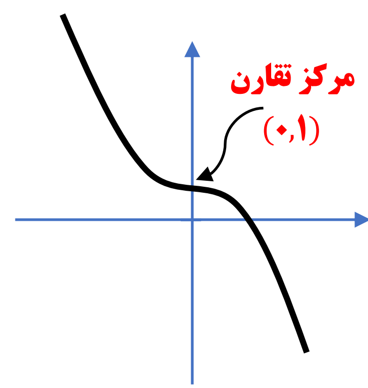
نمودار $y=-x^{۳}$



راه اول : انتقال

تابع $f(x)=-x^{۳}+۱$ را رسم کنید.

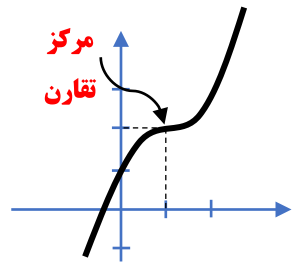
نمودار $y=-x^{۳}$ را یک واحد بالا می بریم



رسم درجه سوم (بخش دوم)

تابع $f(x)=(x-۱)^{۳}+۲$ را رسم کنید.

نمودار $y=x^{۳}$ را یک واحد راست و ۲ واحد بالا می بریم.

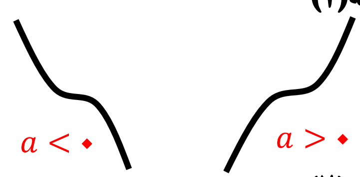


برای پیدا کردن محل برخورد با محور y ها بجای $x=۰$ قرار می دهیم که $y=۱$ بدست می آید.

راه دوم : اگر به صورت فرم گسترده باشد

$y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$

مرحله(۱)



مرحله(۲)

$$x_{\text{مرکز تقارن}}=-\frac{b}{۳a}$$

$x_{\text{مرکز تقارن}}$ را در معادله قرار می دهیم و y آن نقطه را پیدا می کنیم.

مرحله(۳) محل برخورد با محور y ها را پیدا کنید.

رسم درجه سوم (بخش سوم)

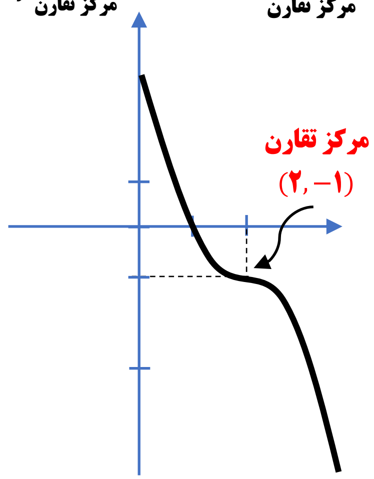
منحنی $y=-x^{۳}+۶x^{۲}-۱۲x+۷$ را رسم کنید.

$$y=\underbrace{-۱}_{a}x^{۳}+\underbrace{۶}_{b}x^{۲}\underbrace{-۱۲}_{c}x+\underbrace{۷}_{d}$$

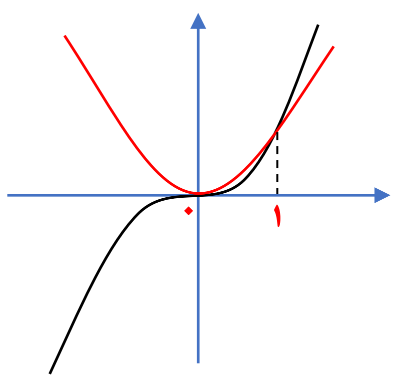
$$x_{\text{مرکز تقارن}}=-\frac{b}{۳a}=-\frac{۶}{۳\times -۱}=۲$$

$$y_{\text{مرکز تقارن}}=-۲^{۳}+۶\times ۲^{۲}-۱۲\times ۲+۷$$

$y_{\text{مرکز تقارن}}=-۱$ $\quad$ $x_{\text{مرکز تقارن}}=۲$



مقایسه $y=x^{۲}$ و $y=x^{۳}$



نکات پایه ای که باید قبل از شروع نکته و تست بدانید

رسم رادیکال های درجه یک (بخش اول)

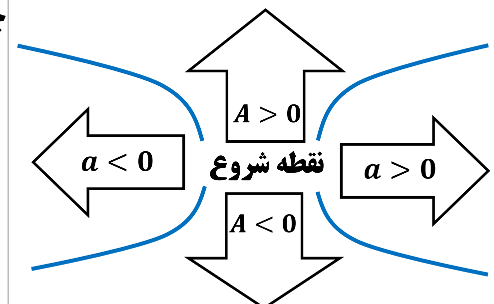
$$y=A\sqrt{ax+b}+B$$

نقطه شروع ریشه زیر رادیکال است.

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

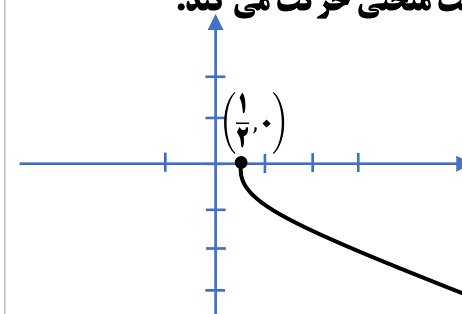
این x را درون تابع قرار می دهیم و y را محاسبه می کنیم، این نقطه شروع است.

A ضریب پشت رادیکال و a ضریب x



مثال: تابع $y=-\sqrt{2x-1}$ را رسم کنید.

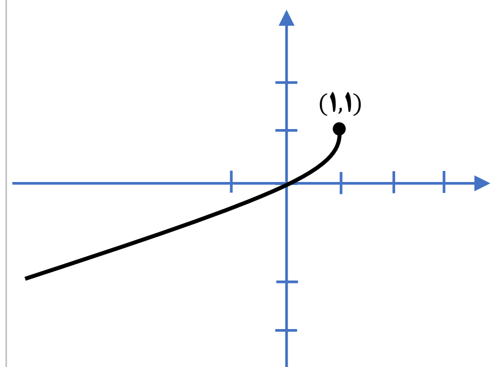
ریشه زیر رادیکال $x=\frac{1}{2}$ است و اگر جایگذاری کنید $y=0$ بدست می آید، چون ضریب رادیکال منفی است به سمت پایین و چون ضریب x مثبت است به سمت راست منحنی حرکت می کند.



رسم رادیکال های درجه یک (بخش دوم)

تابع $y=-\sqrt{1-x}+1$ را رسم کنید.

ریشه زیر رادیکال $x=1$ است و اگر جایگذاری کنید $y=1$ بدست می آید، چون ضریب رادیکال منفی است به سمت پایین و چون ضریب x منفی است به سمت چپ منحنی حرکت می کند.

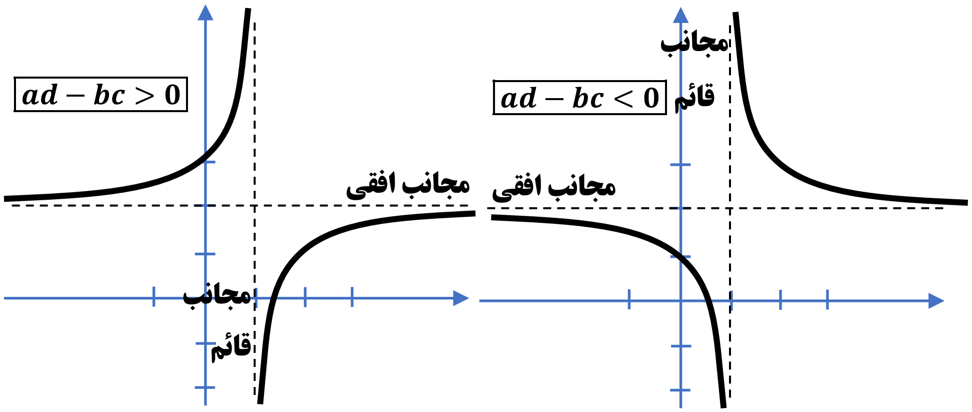


رسم توابع هموگرافیکی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

مرحله (۱): اگر مخرج را برابر صفر قرار دهیم مجانب قائم بدست می آید. $x=-\frac{d}{c}$

مرحله (۲): مجانب افقی از تقسیم ضرایب x برهم بدست می آید. $y=\frac{a}{c}$

مرحله (۳): محاسبه $p=ad-bc$ برای تشخیص نوع منحنی



مثال: تابع $y=\frac{2x-1}{x-1}$ را رسم کنید.

$$y=\frac{\overbrace{2}^{a}x\overbrace{-1}^{b}}{\underbrace{1}_{c}x\underbrace{-1}_{d}}$$

مرحله (۱): مجانب قائم $\text{مخرج}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

مرحله (۲): مجانب افقی $y=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

مرحله (۳): $p=ad-bc=2\times(-1)-(-1)\times(1)=-1$

محل برخورد با محور y ها:

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{-1}=1$$

محل برخورد با محور x ها:

$$y=0=\overbrace{2x-1=0}^{\text{صورت برابر صفر}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$