درس اوّل: متناهی و نامتناهی

درسنامه: (مجموعهٔ اعداد)

با مجموعهٔ اعداد زیر سال‌های قبل آشنا شده‌اید.

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbf{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\ ,\ m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq ۰\}=\{\frac{m}{n}\ ,\ m\in\mathbb{Z}\ ,n\in\mathbb{N}\}$

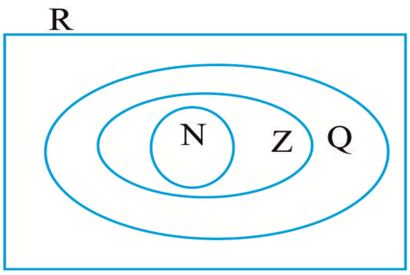
مجموعه اعداد گویا: مجموعه اعدادی است که بتوان آنها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}^c=$ {مجموعه اعدادی که گویا نباشد}

مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین مجموعه‌های بالا به صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbf{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است. تمام مجموعهٔ اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند پس هر عدد دلخواهی که در نظر می‌گیریم نقطه ای روی محور اعداد حقیقی دارد. و هر نقطه روی محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی است.

تمرین ۱: الف) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ چه نام دارد دو عضو دلخواه آن را در جای مناسب روی شکل بنویسید.



ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی محور اعداد حقیقی، به صورت تقریبی نمایش دهید.

پ) اعداد زیر را روی محور اعداد حقیقی، به صورت تقریبی یا دقیق نشان دهید.

$\sqrt{۱۷}$:

۰:

۲۰۰:

$\frac{\pi}{۲}$:

$۲/۶$:

$۲\sqrt{۵}$:

$-\frac{۲۵}{۳}$:

-۹ :

ت) مجموعهٔ اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

ث) مجموعهٔ $\mathbf{W}-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

تمرین ۲: کدام‌یک از اعداد روبرو گنگ است؟ $۲/۴۵\ ,\ -\frac{۷}{۲}\ ,\ ۶\ ,\ -۴/۹\ ,\ \pi\ ,\ -\sqrt{۲}$

تمرین ۳: کدام جمله درست و کدام نادرست است؟

الف) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود.

ب) حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، گویا است.

پ) حاصل جمع هر دو عدد گویا، گویا است.

ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است.

ث) حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، گنگ است.

ج) حاصل‌ضرب دو عدد گویا و گنگ در یکدیگر، گنگ است.

درسنامه : (بازه‌ها)

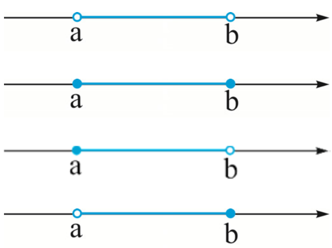
مدل دیگری از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی را می‌توان به صورت بازه‌ها نشان داد که آنها را معرفی می‌کنیم و نمایش مجموعه‌ای و هندسی(نمایش به روی محور) آنها را می‌آوریم.

۱) بازهٔ باز: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}\ |\mathbf{a}<\mathbf{x}<\mathbf{b}\}$

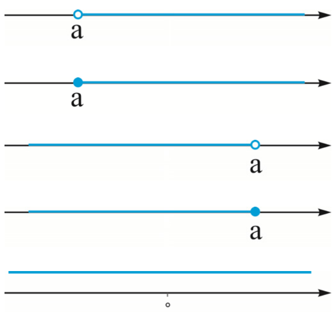
۲) بازهٔ بسته: $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}\ |\mathbf{a}\le\mathbf{x}\le\mathbf{b}\}$

۳) بازهٔ نیم‌باز: $[\mathbf{a},\mathbf{b})=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}\ |\mathbf{a}\le\mathbf{x}<\mathbf{b}\}$

۴) بازهٔ نیم‌باز: $(\mathbf{a},\mathbf{b}]=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}\ |\mathbf{a}<\mathbf{x}\le\mathbf{b}\}$



نکته: برای نمایش بصورت بازه، اعداد حقیقی بزرگ‌تر از عدد a یا اعداد حقیقی کوچک‌تر از عدد a از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم.



۵) بازهٔ باز: $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ |x>a\}$

۶) بازهٔ نیم‌باز: $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ |x\geq a\}$

۷) بازهٔ باز: $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\ |x<a\}$

۸) بازهٔ نیم‌باز: $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\ |x\leq a\}$

۹) مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

اجتماع و اشتراک بازه‌ها

برای نشان دادن اجتماع و اشتراک بازه‌ها، نمایش هندسی بازه‌ها را روی یک محور رسم می‌کنیم و سپس اجتماع و اشتراک را مشخص می‌کنیم و به صورت بازه می‌نویسیم.

تمرین ۴: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{۴}{۳}\in[\frac{۱}{۲},۲)$

ب) $-۲\in[-۲,۰]$

پ) $۰\in(-۲,۰]$

ت) $-۲\in\{-۲,۰\}$

ث) $-۱\in\{-۲,۰\}$

ج) $[-۱,۲]\subseteq(-۱,۲)$

چ) $[۰,۱]\subseteq[-۱,۲)$

ح) $\varnothing\subseteq(-۱۷,۰]$

خ) $[۲,۵)=(۲,۵]$

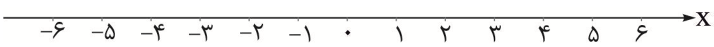
د) $\sqrt{۲}\in(۰,۱)$

تمرین ۵: هریک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند، هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.

$۰/۲$ $۶/۰۲\times۰^{۲۳}$ $-\frac{۵}{۲}$ -۵۰۰ $\sqrt{۳}$ -۲

$(-۲,۳)$ $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ $[۳,+\infty)$ $[-۲,۰)$ $(-\infty,-۴)$ $[۱,۴]$

تمرین ۶: نمایش هندسی دو بازهٔ $A=(-۴,۲]$ و $B=(-۱,۳]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک بازه بنویسید. (تمرین کتاب)



الف) $A\cap B=$

ب) $A\cup B=$

پ) $A-B=$

ت) $B-A=$

تمرین ۷: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\ ,\ -۱<x<۲\}$ و $B=\{x \mid ۰<x<۳\}$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک بازه بنویسید.

الف) $A\cup B$

ب) $A\cap B$

پ) $A-B$

ت) $(A\cup B)-(A\cap B)$

تمرین ۸: اگر $\{x-y\ ,\ ۲x+۲y\}=\{۴\}$ باشد مقدار y و x را بیابید.

تمرین ۹: فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}, B=\{۰,۱,۲,۵\}$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟(چرا؟)

الف) $(A\cup B)-B$

ب) $(A-B)\cup(B-A)$

پ) $(A\cap B)-B$

ت) $(A-B)\cap(B-A)$

تمرین ۱۰: فرض کنید $A=\{۱,۸,۹,۱۰\}, B=\{۵,۷,۱۰,۱۱\}$ باشد. نشان دهید مجموعهٔ $(A-B)\cup(B\cap A)$ برابرمجموعه A است.

درسنامه : (مجموعه‌های متناهی و نامتناهی)

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد **مجموعهٔ متناهی** نام دارد.

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است را **مجموعهٔ نامتناهی** می‌نامیم.

تمرین ۱۱: فرض کنید مجموعهٔ A اعداد طبیعی کمتر از ۴ باشد، و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ٤ باشد: (تمرین کتاب)

الف) این دو مجموعه را با اعضا نمایش دهید.

ب) A چند عضو دارد؟

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

تمرین ۱۲: متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید دربارهٔ مجموعه‌های متناهی تعداد اعضا را مشخص کنید. (تمرین کتاب)

الف) مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد

پ) مجموعهٔ تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

ت) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۱

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰

ج) مجموعهٔ اعداد بازهٔ $(0,1)$

چ) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج ۲رقمی

ح) مجموعهٔ دانش‌آموزان دبیرستان‌های تهران

تمرین ۱۳: دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید؟ (تمرین کتاب)

تمرین ۱۴: دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $B \subseteq A$ و $B-A$ تک‌عضوی باشد. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۵:

الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین ۰ و ۱ است چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ $(0,1)$ بنویسید. (تمرین کتاب)

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ $(0,1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ .... خواهد بود. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۶: فرض کنید X مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد. (تمرین کتاب)

الف) X را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) X متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از X بنویسید.

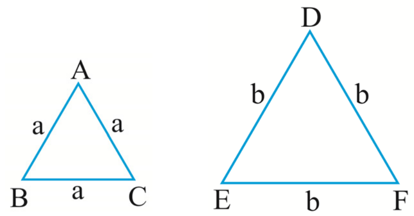
ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از X بنویسید به‌طوری‌که $C \subseteq D$.

درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

درسنامه: (مثلث‌های متشابه)

تعریف دو مثلث متشابه: دو مثلث را متشابه گوئیم اگر زاویه‌های نظیر با هم مساوی و اضلاع نظیر متناسب باشند.

دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابهند زیرا همهٔ زاویه‌ها 60° هستند و اگر ضلع مثلث اول **a** و ضلع مثلث دیگر **b** باشد نسبت اضلاع مثلث اول به دوم برابر است با $\frac{a}{b}$.

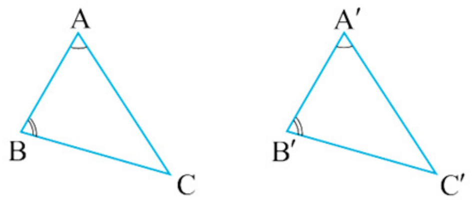


$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=\hat{E}=\hat{F}=60^\circ$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{a}{b}$$

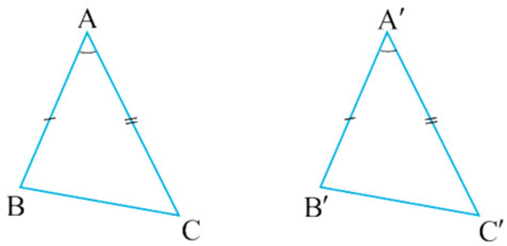
حالت‌های تشابه دو مثلث:

۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.



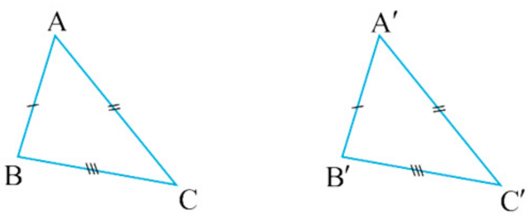
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\simeq A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

۲) اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب و زاویهٔ بین آنها برابر باشند دو مثلث متشابهند.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\simeq A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

۳) اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.

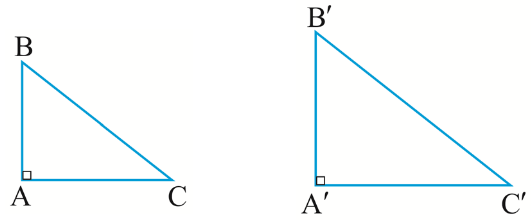


$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\simeq A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

تمرین ۱: مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ قائم‌الزاویه هستند $(\hat{A}=\hat{A}'=90^\circ)$ اگر $\hat{C}=\hat{C}'$:

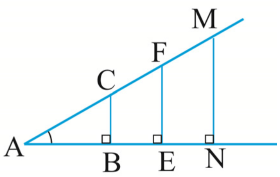
الف) آیا دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابهند.

ب) در این دو مثلث اجزای نظیر را بنویسید.



تمرین ۲: در تمرین قبل آیا می‌توان رابطهٔ $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}$ را نتیجه گرفت؟ چرا؟

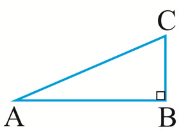
تمرین ۳: در شکل زیر درستی تساوی $\frac{EF}{AE}=\frac{BC}{AB}$ را بررسی کنید.



درسنامه :

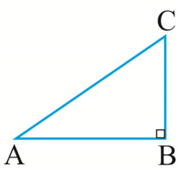
- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر داریم:

$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}=\frac{BC}{AB}$$

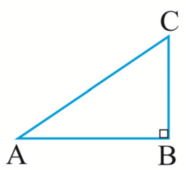


- عکس تانژانت A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم به‌عبارت دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}=\frac{AB}{BC}$$

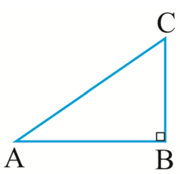


- در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با $\sin A$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر:



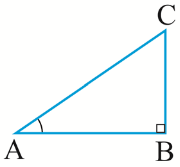
$$\sin A=\frac{BC}{AC}$$

- در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر:



$$\cos A=\frac{AB}{AC}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC:

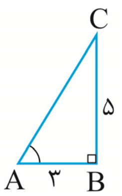


$$\tan \mathbf{A} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AB}} = \frac{\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AC}}}{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}} = \frac{\sin \mathbf{A}}{\cos \mathbf{A}} \Rightarrow \tan \mathbf{A} = \frac{\sin \mathbf{A}}{\cos \mathbf{A}}$$

$$\cot \mathbf{A} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \frac{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}}{\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AC}}} = \frac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathbf{A}} \Rightarrow \cot \mathbf{A} = \frac{\cos \mathbf{A}}{\sin \mathbf{A}}$$

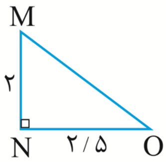
در یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت را **نسبت‌های مثلثاتی** می‌نامیم.

تمرین ۴: در هریک از شکل‌های زیر جاهای خالی را پر کنید.



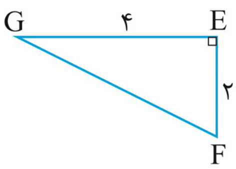
$\tan \mathbf{A} =$

$\cot \mathbf{A} =$



$\cot \mathbf{M} =$

$\tan \mathbf{M} =$



$\tan \mathbf{F} =$

$\cot \mathbf{F} =$

تمرین ۵: مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید، و نسبت‌های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به‌دست آورید.

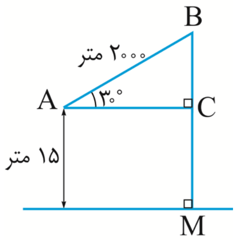
تمرین ۶: با رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین که طول ساق‌ها ۱ واحد است نسبت‌های مثلثاتی ۴۵° را به‌دست آورید.

درسنامه:

برای اینکه نسبت‌های مثلثاتی ۳۰، ۴۵ و ۶۰ را بتوانیم راحت‌تر به‌خاطر بسپاریم می‌توانیم در داخل جدول، زوایا را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم و در ستون اول sin و cos و tan و cot را می‌نویسیم سپس جلو سینوس از ۱ تا ۳ را می‌نویسیم و یک رادیکال با فرجهٔ ۲ برای آن قرار می‌دهیم و یک مخرج ۲ نیز به آنها می‌دهیم و در سطر دوم جلو cos از ۳ تا ۱ را می‌نویسیم یک رادیکال با فرجهٔ ۲ و یک مخرج ۲ می‌دهیم و برای tan کافیست sin را به cos تقسیم نمائیم و برای cot کافیست tan را معکوس کنیم.

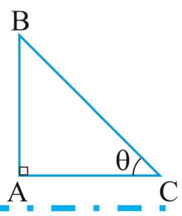
نسبت مثلثاتی \ زاویه	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$
tan	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تمرین ۷: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود، می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟



درسنامه:

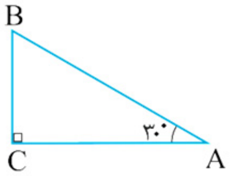
اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و وتر آن مشخص باشند با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی sin و cos می‌توان طول اضلاع زاویهٔ قائمه را محاسبه نمود.



$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BC}.\sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} \Rightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{BC}.\cos\theta \end{cases}$$

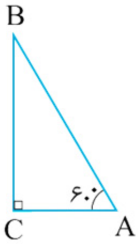
نکته:

۱) اگر زاویهٔ $\hat{\theta} = ۳۰^\circ$ باشد در این‌صورت طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.



$$BC = AB.\sin ۳۰^\circ \Rightarrow BC = AB.(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}AB$$

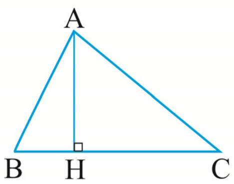
۲) اگر زاویهٔ $\hat{\theta} = ۶۰^\circ$ باشد در این‌صورت طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم‌الزاویه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.



$$BC = AB.\sin ۶۰^\circ = AB.(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB$$

مساحت مثلث:

مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ از حاصل‌ضرب نصف قاعده در ارتفاع وارد بر آن به‌دست می‌آید.

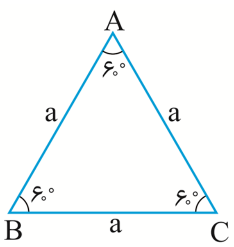


$$S = \frac{۱}{۲}AH.BC \quad (I)$$

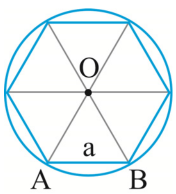
از طرفی می‌دانیم: $\sin B = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.\sin B \quad (II)$

$$(I , II) \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}AB.BC.\sin B$$

تمرین ۸: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.



تمرین ۹: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a را به‌دست آورید.



درس اوّل: ریشه و توان

درسنامه:

ریشه و توان رابطهٔ دوسویه (دو طرفه) با هم دارند. به‌عنوان مثال: $\sqrt[3]{۸} = ۲$, $۲^۳ = ۸$ پس می‌توان نوشت:

$$۲^۳ = ۸ \Leftrightarrow \sqrt[3]{۸} = ۲$$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو عدد حقیقی مثبت یا صفر و $\mathbf{n}$ عددی زوج باشند و $\sqrt[n]{a} = b$ باشد.آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

و اگر $\mathbf{n}$ عددی فرد و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ اعداد حقیقی باشند و داشته باشیم $\sqrt[n]{a} = b$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

تمرین ۱: مانند نمونهٔ مقابل تمام موارد زیر را بنویسید.

$$۲^۴ = ۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[4]{۱۶} = ۲$$

۱) $(-۳)^۳ = -۲۷ \Leftrightarrow$

۲) $(-۵)^۳ = -۱۲۵ \Leftrightarrow$

۳) $۲^۴ = ۱۶ \Leftrightarrow$

۴) $۱۱^۲ = ۱۲۱ \Leftrightarrow$

۵) $(۰/۲۵)^۲ = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow$

۶) $(۰/۵)^۲ = ۰/۲۵ \Leftrightarrow$

۷) $\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow$

۸) $\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow$

۹) $\sqrt[3]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow$

۱۰) $\sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Leftrightarrow$

۱۱) $\sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳} \Leftrightarrow$

۱۲) $\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow$

۱۳) $\sqrt[3]{۱۰۰۰} = ۱۰ \Leftrightarrow$

۱۴) $(۵\sqrt{۳})^۲ = ۷۵ \Leftrightarrow$

۱۵) $\sqrt[3]{۷۲۹} = ۹ \Leftrightarrow$

۱۶) $\sqrt[3]{۳۳۷۵} = ۱۵ \Leftrightarrow$

۱۷) $(۵\sqrt[3]{۳})^۳ = ۳۷۵ \Leftrightarrow$

۱۸) $(۲\sqrt{۶})^۲ = ۲۴ \Leftrightarrow$

۱۹) $(-۳\sqrt[3]{۲})^۳ = -۵۴ \Leftrightarrow$

۲۰) $\sqrt[5]{-۳۲} = -۲ \Leftrightarrow$

درسنامه :

در بسیاری از موارد $\sqrt[n]{a}$ یک عدد اعشاری است که به کمک ماشین‌حساب می‌توان مقدار تقریبی آن را به‌دست اورد اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست به همین علت برای مقدار دقیق آن از همان نماد $\sqrt[n]{a}$ استفاده می‌نمائیم.

سؤال: اگر a یک عدد اعشاری باشد a^n به چه عددی طبیعی نزدیک است؟

تمرین ۲: آیا $۲۵ = (۲/۸)^۳$ است؟

تمرین ۳: یک محور رسم کنید و محل تقریبی یا دقیق اعداد $\sqrt[۳]{۳}$, $\sqrt[۳]{۱۲۵}$, $\sqrt[۳]{-۸}$ نمایش دهید.

تمرین ۴: مشخص کنید که هرکدام از ریشه‌ها بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

۱) $\sqrt{۳۰}$

۲) $\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt[۳]{۵}$

۴) $\sqrt{۷}$

۵) $\sqrt[۳]{۲۰}$

۶) $\sqrt[۳]{-۱۷}$

۷) $\sqrt[۳]{۹}$

درسنامه

مانند ریشه‌های دوم و سوم، ریشه‌های چهارم و پنجم و ... را بصورت زیر می‌توان تعریف نمود.

۱) هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ یکدیگرند و عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

۲) هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشهٔ پنجم است اگر عدد مثبت باشد ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن منفی است.

۳) ریشهٔ **n** ام صفر همواره صفر است.

۴) ریشهٔ **n** ام ۱ همواره ۱ است. و ریشهٔ **n** ام ۱− در صورتی که **n** عددی فرد باشد، ۱− است.

تمرین ۵: ریشه‌های چهارم اعداد زیر را حساب کنید.

۱) ۱۶

۲) ۶۲۵

۳) ۳۱۲۵

۴) ۱۰۰۰۰

۵) ۰

تمرین ۶: جاهای خالی را پر کنید. « هر عدد مثبت دارای .... ریشه چهارم است که .... یکدیگرند. اعداد .... ریشه چهارم ندارند و ریشهٔ چهارم اعداد .... و .... همان .... و .... است».

تمرین ۷: ریشهٔ پنجم اعداد زیر را حساب کنید.

۱) -۳۲

۲) -۲۴۳

۳) $-۰/۰۰۰۳۲$

۴) ۱۰۰۰۰۰

۵) $\frac{۱}{۳۲}$

۶) -۱

تمرین ۸: جاهای خالی را پر کنید. « هر عدد منفی یا مثبت دارای .... ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد ریشه پنجم آن .... است و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن .... است».

تمرین ۹: برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است جواب آن را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر، بین آنها باشد.

۱) $-\sqrt{۳۵}$

۲) $\sqrt[۳]{۵۰}$

۳) $\sqrt[۳]{-۹۰}$

۴) $\sqrt[۵]{-۳۲}$

۵) $\sqrt[۵]{۴۰۰}$

۶) $\sqrt[۴]{۴۰۰}$

تمرین ۱۰: مقدار تقریبی هرکدام از اعداد رادیکالی زیر را با تقریب کم‌تر از ۰/۱ مشخص کنید.

۱) $\sqrt{۱۰}$

۲) $\sqrt[۳]{۷}$

۳) $\sqrt[6]{۵}$

۴) $\sqrt[4]{۱۶}$

تمرین ۱۱: حجم مکعبی را اندازه گرفته‌ایم و برابر ۲۸ سانتی‌متر مکعب شده است. ضلع مکعب را با تقریب کمتر از ۰/۱ اندازه بگیرید.

تمرین ۱۲:

الف: اگر a عددی مثبت باشد و $\sqrt[3]{a} > a$. آن‌گاه a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ب) a عددی مثبت است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است یعنی $\sqrt[3]{a} = a$، a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$ است، a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ت) موارد الف، ب و پ را وقتی a منفی است پاسخ دهید.

■ در حالت کلی می‌توان گفت اگر فرجه در ریشه‌گیری فرد باشد ۳ حالت اتفاق می‌افتد:

۱) اگر ریشهٔ عدد از خود عدد بزرگ‌تر باشد یعنی $\sqrt[n]{a} > a$ آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد :

الف) اگر a مثبت باشد آن‌گاه $۰ < a < ۱$. (در این حالت ، n هم زوج و هم فرد می‌تواند باشد.)

ب) اگر a منفی باشد آن‌گاه $a < -۱$. (در این حالت n فقط فرد می‌تواند باشد.)

۲) اگر ریشهٔ عدد با خود عدد برابر است یعنی $\sqrt[n]{a} = a$ آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد :

الف) اگر n زوج باشد، آنگاه a صفر یا ۱ است.

ب) اگر n فرد باشد، آنگاه a ۱- است.

۳) اگر ریشهٔ عدد از خود عدد کوچک‌تر باشد یعنی $\sqrt[n]{a} < a$ در این‌صورت:

الف) اگر a مثبت باشد $a > ۱$ است. (در این حالت n هم زوج و هم فرد می‌تواند باشد.)

ب) اگر a منفی باشد آن‌گاه $-۱ < a < ۰$ است. (در این حالت n فقط فرد می‌تواند باشد.)

تمرین ۱۳:

الف) اگر $a=\sqrt[۴]{۶۴}$، در این‌صورت حاصل $a^{۴}+۵$ را بیابید.

ب) با فرض اینکه $\sqrt[۴]{x}=۴$، حاصل $\sqrt[۸]{x}$ را به‌دست آورید.

تمرین ۱۴: اگر $\sqrt[۵]{۱۶۱۰۵۱}=۱۱$ باشد آنگاه حاصل $\sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد؟

تمرین ۱۵: در جاهای خالی یکی از علامت‌های > یا < یا = را قرار دهید.

۱) $(-۰/۱)^{۵}\ \square\ (-۰/۱)^{۳}$

۲) $(-۲)^{۵}\ \square\ (-۲)^{۴}$

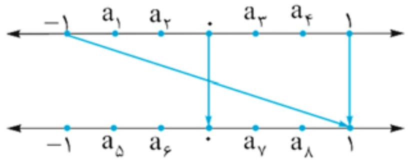
۳) $(۰/۱)^{۵}\ \square\ (۰/۱)^{۳}$

۴) $(-۰/۱)^{۴}\ \square\ (۰/۰۱)^{۲}$

۵) $۲^{۵}\ \square\ ۲^{۲}$

۶) $\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}\ \square\ ۰/۱$

تمرین ۱۶: هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است را وصل کنید.



درسنامه: مقایسه اعداد توان‌دار

مقایسهٔ اعداد توان‌دار در سه حالت اتفاق می‌افتد:

۱) حالت اول، اگر دو عدد توان‌دار، توان‌های مساوی داشته باشند.

الف) اگر عدد، مثبت باشد آنگاه عددی بزرگتر است که پایهٔ بزرگ‌تری داشته باشد. مانند: $(۳/۹)^{۱۲}>(۲/۹)^{۱۲}$, $۴^{۱۱}<۲^{۱۱}$

ب) اگر عدد منفی باشد باید به توان توجه داشته باشیم. یعنی :

I. اگر توان زوج باشد، آنگاه عددی که پایه‌اش کوچک‌تر است، بزرگ‌تر می‌شود مانند: $(-۳)^{۲}>(-۲)^{۲}$, $۹>۴$

II. اگر توان فرد باشد، آنگاه عددی که پایه‌اش بزرگ‌تر است، بزرگ‌تر می‌شود.

۲) حالت دوم، اگر دو عدد پایه‌های مساوی داشته باشند.

حالت اول پایه مثبت باشد.

الف) اگر پایه‌ها بزرگ‌تر از یک باشند آن که توان بزرگ‌تری دارد، بزرگ‌تر است. مانند : $۲^{۳}>۲^{۲}$

ب) اگر پایه بین صفر و یک باشد آن‌که توان بزرگ‌تری دارد کوچک‌تر است. مانند : $(۰/۱)^{۳}<(۰/۱)^{۲}$

پ) در اعداد منفی بستگی به توان دارد می‌دانیم اگر عددی منفی به توان عددی زوج برسد حاصل عددی مثبت است. پس توان زوج اعداد منفی از توان فرد آنها بزرگ‌تر می‌شود. مانند : $(-۲)^{۲}>(-۲)^{۵}$

۳) حالت سوم، اگر نه توان و نه پایه مساوی باشند باید ابتدا عددها را تجزیه نمود. سپس از قواعد بالا استفاده کنیم.

درس اول: معادلهٔ درجهٔ دوم و روش‌های مختلف حل آن

درسنامه : (تعریف معادلهٔ درجهٔ دوم)

به زبان ساده، اگر یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم را مساوی صفر قرار دهیم، به آن معادلهٔ درجهٔ دوم می‌گوییم.

و به زبان ریاضی، هر معادله به شکل $(a \neq 0)$, $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن x مجهول و a و b و c اعداد حقیقی هستند یک معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

به عنوان مثال:

$$1)\quad (x+1)^2 + x^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 4x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - 2x - 3 = 0}$$

پس، به دلیل آنکه در آخر به معادله‌ای رسیدیم که در آن بیشترین توان مجهول ما ۲ بود، این معادله از نوع معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد.

$$2)\quad x(x+2) = (x+3)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 2x = \cancel{x^2} + 6x + 9 \Rightarrow 2x - 6x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{-4x - 9 = 0}$$

می‌بینیم که، پس از ساده کردن به معادله‌ای رسیدیم که در آن بیشترین توان مجهول ۱ است. پس این معادله از نوع معادله درجهٔ دوم نمی‌باشد.

حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌روش تجزیه

در این روش ابتدا تمام جملات را به یک طرف تساوی برده و عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم سپس عبارت را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اول تبدیل می‌کنیم.

نکته: اگر a و b دو عبارت عامل باشند و $ab = 0$، آن‌گاه حداقل یکی از دو عامل صفر است. یعنی:

$$ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = 0 \end{cases}$$

در حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش تجزیه از سه حالت زیر استفاده می‌کنیم:

حالت اول) اگر $c = 0$ باشد، از x (یعنی عامل مشترک) فاکتور می‌گیریم. سپس از ویژگی ضرب استفاده می‌کنیم و ریشه‌ها را بدست می‌آوریم.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

به عنوان مثال:

$$1)\quad 3x^2 + x = 0 \Rightarrow x(3x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

حالت دوم) اگر $b=0$ باشد، آنگاه:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

سپس از طرفین تساوی بالا ریشهٔ دوم می‌گیریم.

یادآوری : در فصل قبل آموختیم که ریشه‌های زوج فقط برای اعداد مثبت یا صفر قابل محاسبه است به همین دلیل اگر **a** و **c** هم علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، آنگاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و اگر **a** و **c** غیر هم علامت باشند (**a** مثبت و **c** منفی یا **c** مثبت و **a** منفی)، آنگاه ریشه‌های دوم قابل محاسبه است و معادله دو ریشهٔ حقیقی قرینه خواهد داشت.

در روش دیگر، می‌توان گفت اگر **a** و **c** مختلف العلامت باشند، آنگاه معادله قابل تجزیه (بصورت اتحاد مزدوج) خواهد بود و در نهایت هر یک از عوامل تجزیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌ها را بدست می‌آوریم. اگر **a** و **c** هم علامت باشند، معادله ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت.

به عنوان مثال در معادله‌ی $(4x+1)^2 - 25 = 0$ داریم:

حل به روش ریشه‌گیری

$$(4x+1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (4x+1)^2 = 25 \Rightarrow (4x+1) = \pm\sqrt{25} \Rightarrow (4x+1) = \pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+1 = 5 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ 4x+1 = -5 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

حل به کمک اتحاد مزدوج

$$(4x+1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \left[(4x+1)+5\right]\times\left[(4x+1)-5\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4x+1) - 5 = 0 \Rightarrow 4x+1 = 5 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ (4x+1) + 5 = 0 \Rightarrow 4x+1 = -5 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

حالت سوم) اگر $a,b,c \neq 0$ باشند، آنگاه معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه نموده و سپس حل می‌نمائیم.

یادآوری:

$$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$$

برای مثال:

$$1)\quad x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$2)\quad 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(3x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

تمرین ۱: معادلات درجهٔ دوم زیر را به‌روش تجزیه حل نمائید.

۱) $۳t^۲ - t = ۰$

۲) $x^۲ - ۳x = ۱۰$

۳) $x^۲ - ۹x + ۱۴ = ۰$

۴) $x^۲ + x - ۶ = ۰$

۵) $۲۵x^۲ - ۱۶ = ۰$

۶) $۳x^۲ + ۹ = ۰$

۷) $x^۲ - ۱۱x = -۱۰$

۸) $۵t^۲ - ۲۰ = ۰$

درسنامه : (حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌کمک ریشه‌گیری)

اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشته باشیم: $ac < ۰$ و $b = ۰$ آن‌گاه داریم: $ax^۲ = -c \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a} \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

در واقع به‌زبان ساده‌تر می‌توان گفت معادلهٔ $ax^۲ + c = ۰$ در صورتی جواب دارد که a و c مختلف‌العلامه باشند.

تمرین ۲: معادلات زیر را به‌روش ریشه‌گیری حل نمائید. (تمرین کتاب)

۱) $۵x^۲ = ۲۰$

۲) $t^۲ + ۷ = ۰$

۳) $(r - ۲)^۲ = ۱۶$

۴) $۱۶ - (۲x + ۵)^۲ = ۰$

۵) $n^۲ - ۲ = ۲۶$

۶) $(۳t - ۲)^۲ = ۴$

۷) $x^{۲}+۱۲=۳$

۸) $۳-۳k=۳k(۲k-۱)$

۹) $x^{۲}+۲x=۲۴$

۱۰) $۲r^{۲}+r-۲=۰$

۱۱) $x^{۲}-۶x=۷$

۱۲) $s^{۲}-۳s+۳=۰$

۱۳) $r^{۲}+۴r+۴=۰$

درسنامه : (حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش مربع کامل کردن)

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

الف) عدد ثابت را به طرف دوم معادله می‌بریم. $ax^{۲}+bx=-c$

ب) اگر $a\neq ۱$ باشد، آنگاه طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم. $x^{۲}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

پ) ضریب x یعنی $\frac{b}{a}$ را بر ۲ تقسیم نموده و سپس مجذور (به توان ۲) آن را محاسبه نموده و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}=-\frac{c}{a}+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

ت) طرف اول را به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم.

$$(x+\frac{b}{۲a})^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

ث) در خاتمه از روش ریشه‌گیری جواب را به‌دست می‌آوریم. یعنی:

$$\begin{cases} x+\frac{b}{۲a}=\sqrt{\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}} \\ x+\frac{b}{۲a}=-\sqrt{\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}} \end{cases}$$

نکته: باید توجه داشته باشیم در صورتی معادله جواب دارد که در قسمت (ث) طرف دوم نامنفی باشد. $(b^{۲}-۴ac\geq ۰)$

تمرین ۳: معادلات زیر را به روش مربع کامل حل نمائید.

۱) $۲x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$

۲) $۳x^۲ + ۷x + ۴ = ۰$

۳) $t^۲ + ۸t = ۲۰$

درسنامه : (حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی)

در این روش که روابط آن همانند روش مربع کامل کردن قابل اثبات هستند، $b^۲ - ۴ac$ را Δ نامگذاری می‌کنیم و به آن مبین یا دلتا می‌گوییم و سه حالت برای آن در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $\Delta > ۰$ باشد، در این صورت معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که عبارتند از: $x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲) اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم دارای یک ریشهٔ مضاعف (یا دو ریشه که با هم برابرند) است: $x_۱ = x_۲ = -\frac{b}{۲a}$

۳) اگر $\Delta < ۰$ باشد معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

تمرین ۴: معادلات درجهٔ دوم زیر را به‌روش کلی حل نمائید.

۱) $x^۲ - x + ۱ = ۰$

۲) $-۲x^۲ + x + ۳ = ۰$

۳) $-x^۲ + ۴x - ۴ = ۰$

۴) $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$

۵) $r - r^۲ = ۳$

درس اوّل: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

درسنامه: (تعریف تابع)

بسیاری از پدیده‌های اطراف ما به نوعی باهم در ارتباط هستند نوع خاصی از این ارتباط در بسیاری از موارد مشاهده می‌شود. به عنوان مثال:

دمایی که به ساعت معینی در روز نسبت داده می‌شود.

نمره‌ی ریاضی که به دانش‌آموزان یک کلاس نسبت داده می‌شود.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن هر عضو A دقیقا به یکی از عضوهای B نظیر می‌شود.

نمایش تابع به فرم جدولی:

اگر یک رابطه به صورت جدول بیان شده باشد هنگامی این جدول بیانگر یک تابع است که مقادیر ردیف اول با هم برابر نباشند یا اگر برابر بودند مقادیر ردیف دوم آنها نیز باهم برابر باشند.

- در جدول (۱) مشخص شده است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد.

(۱)

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

تمرین ۱: به چه دلیل جدول‌های شماره‌ی (۲), (۳),(۴) نمایش یک تابع می‌باشند.

(۲)

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش
قیمت	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰

(۳)

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

(۴)

افراد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه

تمرین۲: کدام جدول زیر معرف یک تابع است؟ چرا؟

۱)

x	-۳	۲	۱	۰	$-\sqrt{۹}$
y	۲	۱	-۱	۳	۴

۲)

x	۲	-۲	۰	۲
y	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۲	۱	$(\sqrt{۳})^{-۱}$

۳)

x	۰	۱	۵	۱
y	۳	$۲^{۰}$	-۱	۱

درسنامه: نمایش تابع با نمودار ون(نمودار پیکانی)

یک رابطه بین مجموعه‌های **A** و **B** که با نمودار ون (پیکانی) نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو **A** دقیقا یک پیکان خارج شود. به عبارت دیگر هیچ عضوی وجود نداشته باشد که پیکانی از آن خارج نشده باشد.

تمرین۳: توابع جدولی زیر را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید.

۱)

x	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
y	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸۷

۲)

x	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش
y	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰

۳)

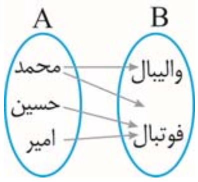
درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

۴)

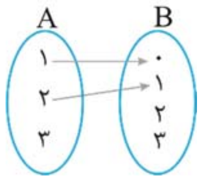
افراد	اسدی	احسانی	کشاورز	رستگار
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنج‌شنبه

تمرین ۴: کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر تابع هستند؟

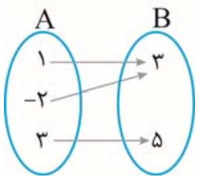
۱)



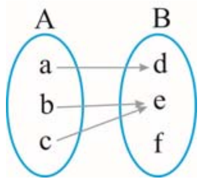
۲)



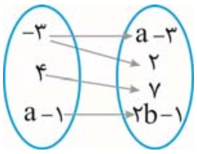
۳)



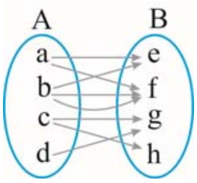
۴)



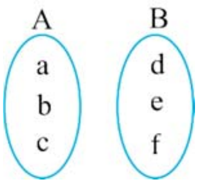
تمرین ۵: اگر نمودار پیکانی مقابل مربوط به یک تابع باشد a و b را بدست آورید.

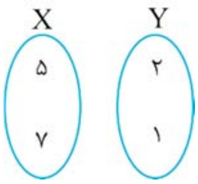


تمرین ۶: حداقل چند پیکان از نمودار مقابل حذف کنیم تا رابطه به یک تابع تبدیل شود.



تمرین ۷: بین دو مجموعه A و B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش می‌دهد. برای دو مجموعه‌ی X و Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.





تمرین ۸: آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد یک تابع است؟ چرا؟

ب)آیا رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد یک تابع است؟ چرا؟

پ) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه‌ی آنها را نسبت می‌دهد یک تابع است؟ چرا؟

درسنامه: (نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی)

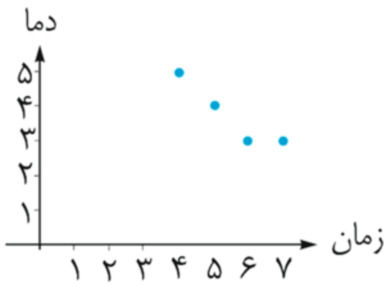
یک تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند، اگر دو زوج مرتب دارای مولفه‌های اول یکسان باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوّم آنها باید یکسان باشند، مؤلفه‌های اول را $\mathbf{x}$ و مؤلفه‌های دوم را $\mathbf{y}$ می‌نامند.

اگر محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها در نظر بگیریم مختصات هر نقطه را می‌توان با یک زوج از اعداد به صورت (x, y) نمایش داد.

تعریف زوج مرتب: هر دوتایی که ترتیبی در آنها در نظر گرفته شود زوج مرتب می‌باشد و آن را به صورت (a, b) نمایش می‌دهیم به $\mathbf{a}$ مؤلفه‌ی اول و به $\mathbf{b}$ مؤلفه‌ی دوم می‌گوییم.

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب را مساوی گوییم اگر مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم نیز با هم مساوی باشند.

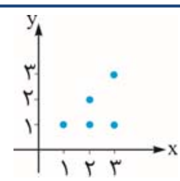
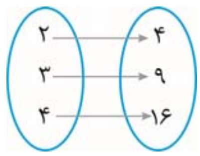
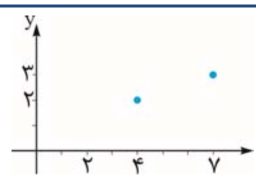
تمرین ۹: در نمودار زیر دمای هوا در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان داده شده است. رابطه‌ی بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و سپس مشخص کنید آیا این رابطه یک تابع است یا خیر؟



تمرین ۱۰: $\mathbf{m,n}$ را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(\mathbf{m}+۲,-۳),(۴,\mathbf{n}-۷)$ باهم برابر باشند.

تمرین ۱۱: اگر مجموعه‌ی $\{(\mathbf{a}+\mathbf{b},۵-۲\mathbf{b}),(۱+\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b})\}$ فقط یک عضو داشته باشد $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را بدست بیاورید.

تمرین ۱۲: در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل کنید و معلوم کنید که آیا رابطه‌ی داده شده یک تابع است؟

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموع زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		$\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه‌های آن را نسبت دهد.
			به اعداد طبیعی بین یک و پنج مجذور آن را نسبت دهد.
			به اعداد ۴و۷ جذر آنها را نسبت می‌دهد.
			شمارنده‌های کمتر از ۱۰ عدد ۳۵ و مربع آنها

تمرین ۱۳: مجموعه‌های $A=\{a,b,c\}, B=\{۱,۲\}$ داده شده‌اند.

آ) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه بنویسیدکه تابع نباشند.

پ) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نیز نمودار، نمایش دهید.

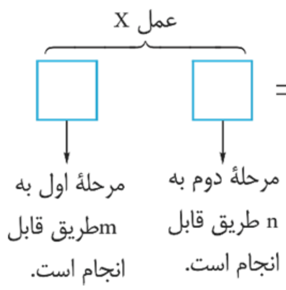
درس اوّل: ترکیبات

درسنامه: (اصل جمع و ضرب)

آنالیز ترکیبی یا ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات گسسته است و در آن بررسی می‌شود که چگونه می‌توان بدون شمارش مستقیم عناصر، اشیاء یا حالت‌ها، آن‌ها را شمارش کنیم. در راستای انجام این عمل از دو اصل اساسی ضرب و جمع که به صورت زیر تعریف می‌شوند، استفاده می کنیم.

اصل ضرب

فرض کنیم عمل X در دو مرحله قابل انجام باشد، به گونه‌ای که انجام مرحلهٔ اول به m روش (طریق) امکان‌پذیر باشد و انجام مرحلهٔ دوم (پس از آنکه مرحلهٔ اول انجام شد) به n روش (طریق) امکان‌پذیر باشد. در این صورت کل عمل X به حاصلضرب تعداد روش‌های دو مرحله، یعنی $m \times n$ طریق قابل انجام خواهد بود.

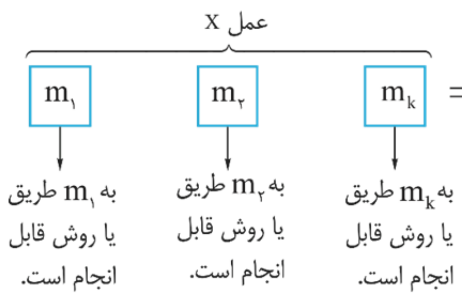


$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان عمل X را انجام داد $= m \times n$

نکته: در اصل ضرب تمامی مراحل به یکدیگر وابسته می‌باشند.

تعمیم اصل ضرب

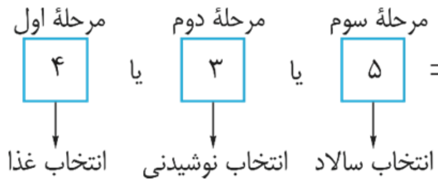
فرض کنیم عمل X در K مرحله قابل انجام باشد و مرحلهٔ اول به m_1 طریق، مرحلهٔ دوم به m_2 طریق، ... و مرحلهٔ آخر به m_K طریق قابل انجام باشد و تمامی مراحل به جز مرحلهٔ اول به یکدیگر وابسته باشند. در این صورت کل عمل X به حاصلضرب تعداد روش‌های K مرحله یعنی $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_K$ طریق قابل انجام خواهد بود.



$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان عمل X را انجام داد $= m_1 \times m_2 \times \dots \times m_K$

برای مثال: در منوی یک رستوران ۴ نوع غذا، ۳ نوع نوشیدنی و ۵ نوع سالاد وجود دارد. یک شخص می‌خواهد برای خود یک غذا و یک نوشیدنی و یک سالاد سفارش دهد. محاسبه کنید آن شخص به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد؟

عمل انتخاب در سه مرحله انجام می‌شود:
- انتخاب غذا
- انتخاب نوشیدنی
- انتخاب سالاد



$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌های انتخاب غذا و نوشیدنی و سالاد $= ۴ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$

اصل جمع

فرض کنیم عمل X در دو مرحله قابل انجام باشد، به گونه‌ای که دو مرحله هیچ ارتباطی به هم نداشته باشند و مرحلهٔ اول به m روش (طریق) و مرحلهٔ دوم به n روش (طریق) قابل انجام باشد. در این صورت کل عمل X به حاصل جمع تعداد روش‌های دو مرحله، یعنی $m+n$ طریق قابل انجام است.

عمل X

$\boxed{m}$ $\boxed{n}$ $\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان عمل X را انجام داد $= m+n$

مرحلهٔ اول به mطریق قابل انجام است.

مرحلهٔ دوم به n طریق قابل انجام است.

نکته: در مسایل اصل جمع، انجام شدن یک مرحله هیچ ارتباطی به مراحل قبلی خود ندارد.

به عنوان مثال: شخصی ۴ پیراهن متفاوت و سه کفش متفاوت دارد، به چند طریق می‌تواند برای خود یک پیراهن یا یک کفش انتخاب کند؟

بدلیل استفاده از کلمه « یا » شخص مورد نظر نباید هم پیراهن (مرحلهٔ اول) و هم کفش (مرحلهٔ دوم) برای خود انتخاب کند، یعنی می‌تواند فقط یکی از دو مرحله را انجام دهد. بنابراین بر طبق اصل جمع حل خواهد شد.

$\boxed{۴}$ یا $\boxed{۳}$ $\Rightarrow$ طبق اصل جمع، تعداد کل حالات $= ۴ + ۳ = ۷$

انتخاب پیراهن — انتخاب کفش

دقت کنید که اگر در مسالهٔ بالا گفته شود یک پیراهن و یک کفش برای خود انتخاب کند، آنگاه حتما باید هر دو مرحله انجام شود و مساله از اصل ضرب به صورت زیر حل خواهد شد:

$\boxed{۴}$ و $\boxed{۳}$ $\Rightarrow$ طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات $= ۴ \times ۳ = ۱۲$

انتخاب پیراهن — انتخاب کفش

تعمیم اصل جمع

فرض کنیم عمل X در K مرحله قابل انجام باشد و مرحلهٔ اول به m_1 طریق، مرحلهٔ دوم به m_2 طریق، ... و مرحلهٔ آخر به m_K طریق قابل انجام باشد و مراحل به یکدیگر وابسته نباشند. در این صورت کل عمل X به حاصل جمع تعداد روش‌های K مرحله یعنی $m_1 + m_2 + \dots + m_K$ طریق قابل انجام خواهد بود.

عمل X

$\boxed{m_1}$ $\boxed{m_2}$ ... $\boxed{m_k}$ $\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان عمل X را انجام داد $= m_1 + m_2 + \dots + m_K$

مرحلهٔ اول که به m_1 طریق قابل انجام است.

مرحلهٔ دوم که به m_2 طرق قابل انجام است.

مرحلهٔ آخر که به m_k طریق قابل انجام است.

برای مثال در مساله رستوران اگر قرار باشد شخص یک غذا یا یک نوشیدنی یا یک سالاد انتخاب کند، آنگاه مساله از طریق اصل جمع قابل حل خواهد بود.

مرحلهٔ سوم		مرحلهٔ دوم		مرحلهٔ اول
۵	یا	۳	یا	۴
انتخاب سالاد		انتخاب نوشیدنی		انتخاب غذا

⇐ تعداد کل حالت‌های انتخاب غذا و نوشیدنی و سالاد = ۶۰ = ۵ + ۳ + ۴

نکته: در حل بسیاری از مسایل باید هم از اصل جمع و هم از اصل ضرب استفاده کرد.

تمرین 1 : الف) امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا شیرینی بدهد، او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران یا آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۳ نوع غذای چلوخورشت، قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آبمیوه‌فروشی برود تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ طالبی، سیب و انبه را می‌تواند انتخاب کند چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

ب) هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد برای تولدش امین را دعوت کند، اما او می‌خواهد امین را هم به رستوران و هم به آبمیوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آبمیوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد، امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

پ) چه تفاوتی در دو قسمت الف و ب وجود داشت؟

تمرین ۲: فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

تمرین 3 : الف) پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود، او به یکی از دو انتخاب یک دسته گل که همهٔ گل‌های آن از یک نوع می‌باشند یا یک جعبه شیرینی که همگی از یک نوع باشند، برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد عبارتند از مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی، پژمان به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد؟

ب) هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد یک شاخه گل و یک نوع شیرینی بخرد و همان گزینه‌های قسمت الف را در ذهن دارد این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟

پ) در هریک از قسمت‌های الف و ب از چه اصلی استفاده کردید؟

تمرین 4 : فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود سفر کند می‌خواهد از قم عبور کند، از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود دارد و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند او در کل چند انتخاب دارد؟

تمرین ۵: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هرکدام می‌توانند یکی از ۳۲ حرف فارسی یا یکی از ۲٦ حرف کوچک انگلیسی باشند، اگر حروف کنار هم از یک زبان باشند برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

تمرین ۶: با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

تمرین ۷: با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

تمرین ۸: با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

تمرین ۹: با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه‌رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۰: تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. (تمرین کتاب)

(مشخص کنید از اصل ضرب استفاده شده یا از اصل جمع)

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.

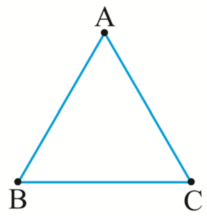
پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

ث) این رمز از ٤ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

تمرین ۱۱: در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشند چندتاست؟ (تمرین کتاب)

تمرین ۱۲: می‌خواهیم رأس‌های مثلث را با سه رنگ قرمز، آبی، زرد رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند همرنگ نباشند.

تمرین ۱۳: در کشورمان پلاک اتومبیل‌ها بصورت

ایران ۴۴	عدد ۳ رقمی	حرف	عدد ۲ رقمی

می‌باشند، مانند

ایران ۴۴	۴۳۸ ط ۴۹

.اگر عدد دورقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A ، دیگر اعداد سه رقمی و دو رقمی از مجموعهٔ B و حرف استفاده شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شوند، مشخص کنید چند پلاک می‌توانیم تولید نماییم؟

C = {ی، ه، و، ن، م، ل، ق، ط، ص، س، د، ج، ب} $\qquad$ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ $\qquad$ $A=\{۱۱,۲۲,۳۳,\ldots,۹۹\}$

تمرین ۱۴: در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می‌شود. (تمرین کتاب)

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

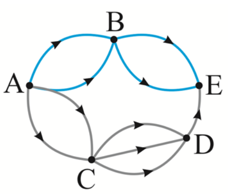
پ) چند نوع از اتومبیل‌های تولید شده مشکی و دندهٔ اتوماتیک دارند؟

تمرین ۱۵: یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ٤ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله- خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر: (تمرین کتاب)

الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤالات پاسخ دهد.

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد.

تمرین ۱۶: اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟ (تمرین کتاب)



درس اوّل: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

درسنامه:

پدیدهٔ تصادفی (آزمایش تصادفی، تجربهٔ تصادفی): آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نمی‌توان پیش‌بینی کرد ولی مجموعهٔ نتایج ممکن آن آزمایش از قبل قابل پیش‌بینی است.

پدیدهٔ قطعی: در پدیده‌های قطعی با فرض یکسان بودن شرایط، نتیجهٔ آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع می‌توان به‌طور قطع مشخص کرد.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن پدیده‌های تصادفی را **فضای نمونه‌ای** می‌گوئیم. فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهیم.

فضای نمونه‌ای گسسته: اگر اعضای فضای نمونه ای قابل شمارش باشند، آن را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌نامیم و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ یا $|S|$ نمایش می‌دهیم.

برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک **برآمد** می‌گوییم.

نکته:

۱) فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه یا یک سکه n بار یا جنسیت n فرزند $n(S)=۲^n$ است.

۲) فضای نمونه‌ای پرتاب ۱ سکه و ۱ تاس برابر $n(S)=۲\times۶=۱۲$ است و فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه و m تاس برابر $n(S)=۲^n\times۶^m$ است.

۳) فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس یا یک تاس n بار برابر $n(S)=۶^n$ است.

۴) هرگاه کیسه‌ای محتوی n مهره متمایز باشد و بخواهیم از این کیسه k مهره به تصادف خارج کنیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=\binom{n}{k}$ است.

تمرین 1 : یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید.

تمرین 2 : یک تاس را پرتاب می‌کنیم اگر عددی زوج بیاید یک سکه و اگر عددی فرد بیاید ۲ سکه را پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی را به صورت یک مجموعه بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

تمرین ۳: در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه متمایز وجود دارد ۳ مهره به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم فضای نمونه‌ای دارای چند عضو است؟

تمرین ۴: سه ظرف داریم اولی شامل ۵ مهرهٔ سبز، دومی شامل ٤ مهره سیاه و سومی شامل ٦ مهرهٔ سفید است از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

درسنامه:

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد تصادفی است.

انواع پیشامد:

۱) پیشامد غیرممکن یا نشدنی: پیشامدی است که امکان رخداد آن نباشد یا نتواند رخ دهد، پیشامد غیر ممکن می‌گوییم. (مانند ظاهر شدن عدد ۷ در پرتاب تاس) به زبان ریاضی پیشامدی که برابر تهی باشد پیشامد غیرممکن است.

۲) پیشامد قطعی (حتمی): پیشامدی که برابر فضای نمونه‌ای (S) باشد را پیشامد قطعی می‌گوییم.

نکته:

۱) اگر فضای نمونه‌ای n عضو داشته باشد آن‌گاه فضای نمونه‌ای 2^n زیرمجموعه دارد یعنی 2^n پیشامد دارد.

۲) تعداد کل پیشامدهای تصادفی در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه‌ای S ، $2^{n(S)}$ است.

۳) تعداد پیشامدهای تصادفی k عضوی از فضای نمونه‌ای S برابر است با: $\binom{n(S)}{k}$

تمرین ۵: اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیاندازیم همهٔ حالت‌های ممکن را در یک جدول تنظیم کنید و طبق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود را در جدول بررسی کنید سپس به سؤالات جواب دهید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)					
۲						
۳				(۳,۴)		
۴						
۵						
۶						

الف) پیشامد A که در آن اعداد روی دو تاس مشخص باشند چند عضو دارد.

ب) قطر مشخص شده در جدول چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟

پ) خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فرد می‌باشند را هاشور بزنید. چه الگویی به‌دست می‌آید.

درسنامه (مجموع اعداد رو شده در دوتاس)

وقتی دو تاس را پرتاب می‌کنیم مجموع اعداد رو شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

تعداد حالات	مجموع دو تاس
۱	۲
۲	۳
۳	۴
۴	۵
۵	۶
۶	۷
۵	۸
۴	۹
۳	۱۰
۲	۱۱
۱	۱۲

		مجموع
۱ حالت	(۱,۱)	۲
۲ حالت	(۱,۲) , (۲,۱)	۳
۳ حالت	(۱,۳) , (۲,۲) ,(۳,۱)	۴
۴ حالت	(۱,۴) , (۳,۲) , (۲,۳) , (۴,۱)	۵
۵ حالت	(۱,۵) , (۲,۴) , (۳,۳) , (۴,۲) , (۵,۱)	۶
۶ حالت	(۱,۶) , (۲,۵) , (۳,۴) , (۴,۳) , (۵,۲) , (۶,۱)	۷
۵ حالت	(۲,۶) , (۳,۵) , (۵,۳) , (۴,۴) , (۶,۲)	۸
۴ حالت	(۳,۶) , (۴,۵) , (۵,۴) , (۶,۳)	۹
۳ حالت	(۴,۶) , (۵,۵) , (۶,۴)	۱۰
۲ حالت	(۵,۶) , (۶,۵)	۱۱
۱ حالت	(۶,۶)	۱۲

باید به این نکته توجه داشته باشیم که مجموع دو تاس بین ۲ و ۱۲ و مساوی با این دو عدد است اگر مجموع دو تاس ۷ یا کم‌تر از ۷ باشد تعداد حالت‌ها از عدد مجموع یک واحد کم‌تر است.

تعداد حالات هرکدام از مجموع‌های بیش تر از ۷ با تعداد حالات یکی از مجموع‌های کم‌تر از ۷ برابر است و مجموع این دو عدد ۱۴ است.

به‌عنوان مثال مجموع دو عدد رو شده ۶ باشد برابر است با: $۶ - ۱ = ۵$ از طرفی می‌دانیم: $۱۴ - ۶ = ۸$

یعنی مجموع دو عدد رو شده ۸ باشد نیز تعداد حالاتش ۵ است.

نکته: وقتی دو تاس را با هم یا یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم تعداد حالات مجموع دو عدد رو شده وقتی این مجموع m باشد از رابطهٔ $۶-|m-۷|$ به‌دست می‌آید.

تمرین ۶: وقتی دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم:

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

ب) تعداد حالاتی که مجموع دو عدد رو شده ۹ باشد.

پ) پیشامد A را بنویسید، به‌طوری‌که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد.

تمرین ۷: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است مطلوب است: (جنسیت فرزندان فضای نمونه‌ای است)

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A اینکه دقیقاً یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

پ) پیشامد B اینکه حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

ت) پیشامد C اینکه تعداد فرزندان دختر و پسر برابر باشند را بنویسید.

ث) پیشامد D اینکه تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد.

تمرین ۸: در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره چه‌قدر است؟

تمرین ۹: در تمرین فوق اگر A و B و C به‌ترتیب پیشامدهای حداقل یک مهرهٔ آبی، حداکثر یک مهرهٔ آبی و هر سه مهره قرمز انتخاب شوند باشند، تعداد اعضای این پیشامدها را مشخص کنید.

تمرین ۱۰: یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد و پیشامد A که در آن اعداد رو شده در سه پرتاب اول باشند چند عضو دارد؟

تمرین ۱۱: خانواده‌ای دارای چهار فرزند است و پیشامد B وجود ۳ فرزند پسر است. اولا مجموعهٔ B را بصورت ٤ تایی‌های مرتب بنویسید، ثانیا $n(B)$ را بدست آورید.

تمرین ۱۲: هریک از اعداد فرد و طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش‌پذیر باشد را مشخص کنید.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا زوج باشد را مشخص کنید.